Vingt-et-unième Aventure
GÉOMÉTRIE I
SIMILITUDES

Résumé Le jeune Théhessin s'était déjà frotté les années antérieures aux transformations du plan qui se résumaient en général à quatre d'entre elles : symétries, rotations, translations et homothéties. Mais Mathémator lui demande une nouvelle fois de retourner aux sources...

A - AU COMMENCEMENT ÉTAIT LA SIMILITUDE...

A - 1 : Définitions

Mathémator : Si je vous dis transformation du plan, à quoi pensez-vous?

Téhessin : À des points qui se transforment en d'autres points et qui gardent plein de propriétés intéressantes : les longueurs, les angles, les alignements, le parallélisme se conservent. Il y a juste une exception avec l'homothétie qui multiplie les longueurs.

Mathémator : C'est en effet un résumé de vos aventures géométriques des années passées. Depuis, vous avez rencontré, lors de l'étude des nombres complexes notamment, d'autres transformations plus étranges, qui transforment des droites en cercles ou en tout autre chose d'ailleurs[1]. Nous allons nous occuper aujourd'hui d'une catégorie bien particulière de transformations, parmi bien d'autres : les similitudes, dont nous allons donner la définition, mais avant, il faudrait s'entendre sur ce qu'est une transformation du plan...

> **Définition XXI-1**
> *On dit que f est une* ***transformation du plan*** *si*
> ▷ *tout point du plan a une unique image par f*
> ▷ *tout point du plan admet un unique antécédent par f*

Par exemple, une projection orthogonale n'est pas une transformation du plan selon notre définition.

Une similitude, elle, est définie par

1. voir le crocodile page **??** ou à la rigueur l'inversion page **??**, même si ce n'est pas vraiment une transformation

Définition XXI-2

*Une **similitude** est une transformation du plan qui conserve les rapports de longueurs*

C'est à dire que, avec des notations habituelles et des points distincts, $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD}$
On peut utiliser une formulation équivalente

Théorème XXI-1

Soit k un réel strictement positif.
*Une **similitude de rapport k** est une transformation du plan qui multiplie les distances par k.*
Ainsi, si les points A et B ont pour images A' et B', alors $A'B' = k \cdot AB$

Je vous laisse monter *l'équivalence* de ces deux formulations.

A - 2 : Exemples

Pouvez-vous me donner des exemples de similitudes ?

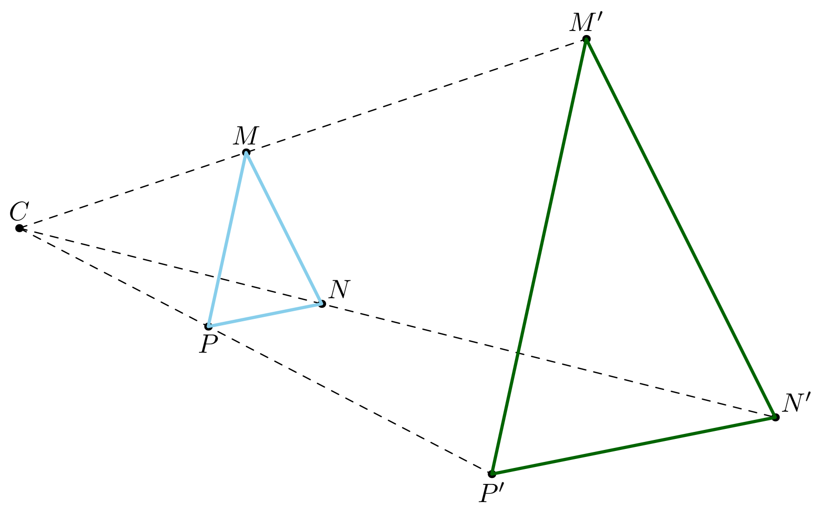
Téhessin : Je ne vois guère que les homothéties dont nous parlions à l'instant.

Mathémator : Vraiment ? Quoi qu'il en soit, il faudrait d'abord rappeler ce qu'est une homothétie...

Définition XXI-3

Soit C un point du plan et λ un réel non nul.
*On appelle **homothétie de centre C et de rapport λ** la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que*

$$\overrightarrow{CM'} = \lambda\overrightarrow{CM}$$



Maintenant, une homothétie est-elle une similitude ?

Téhessin : Je vous l'ai dit, c'est une similitude de rapport λ.

Mathémator : Ahhh...jeunesse. Soient M et N deux points du plan et M' et N' leur images par l'homothétie de rapport λ. Alors $\overrightarrow{CM'} = \lambda\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN'} = \lambda\overrightarrow{CN}$, donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{CN'} = \lambda\overrightarrow{MC} + \lambda\overrightarrow{CN} = \lambda\overrightarrow{MN}$. Nous en déduisons que $M'N' = |\lambda|MN$: eh oui, λ peut être négatif, mais pas le rapport de la similitude. Une homothétie est donc une similitude de rapport la valeur absolue du rapport de l'homothétie.

Téhessin (à part) : Ouais, bon, c'est presque pareil...

Mathémator : C'est bien beau, mais il existe bien d'autres similitudes. En particulier, les isométries...

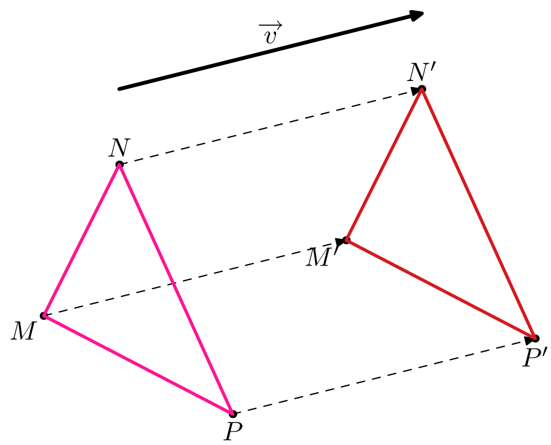
> **Définition XXI-4**
> *Une **isométrie** est une similitude de rapport 1*

Téhessin : Ah, ça, les isométries, ça m'connaît !

Mathémator : Et bien donnez-moi par exemple la définition d'une translation.

Téhessin : Et je vous ferai même un dessin[2]

> **Définition XXI-5**
> *La **translation** de vecteur $\overrightarrow{v}$ est la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que*
>
> $$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}$$



Mathémator : Est-ce une similitude ?

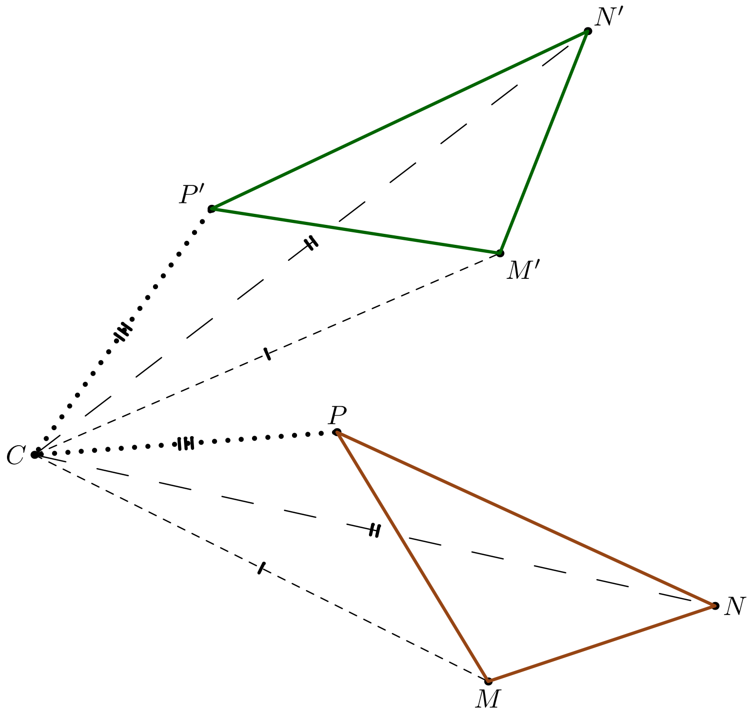
Téhessin : Normalement c'est une isométrie : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\overrightarrow{v} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{v}$, donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, et ainsi $MN = M'N'$. Une translation est bien une similitude de rapport 1.

Mathémator : Restons-en là pour l'instant. D'autres isométries ?

Téhessin : Les rotations :

> **Définition XXI-6**
> *La **rotation** de centre C et d'angle α est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que*
>
> ▷ *si $M \neq M'$, alors $CM = CM'$ et $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}) = \alpha$*
>
> ▷ *si $M = C$, alors $M' = C$*

2. Tu parles ! C'est pas lui qui se colle la programmation sur MetaPost ?...



Je suppose que vous voulez prouver que les rotations sont des isométries...ici, j'ai plus de mal...j'aurais besoin de la conservation des angles par une isométrie...

Mathémator : ...sauf qu'on veut prouver que les rotations sont effectivement des isométries. Je vais vous aider

$$\left(\overrightarrow{CM'},\overrightarrow{CP'}\right)=\left(\overrightarrow{CM'},\overrightarrow{CM}\right)+\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP}\right)+\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CP'}\right)=-\alpha+\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP}\right)+\alpha+2k\pi=\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP}\right)+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

ce qui prouve que les *rotations* conservent les angles et vous pouvez continuer...

Téhessin : ...donc les triangles CMP et $CM'P'$ ayant des angles deux à deux de même mesure sont semblables[3], or $CM=CM'$ et $CP=CP'$, donc ces triangles sont isométriques, donc $MP=M'P'$ et les rotations sont des isométries.

Mathémator : Comme quoi la géométrie en seconde sert quand même à quelque chose.

Bon, il nous reste les symétries axiales qu'on appellera plutôt réflexion d'axe $\mathcal{D}$.

Téhessin : Ça, c'est du cours de sixième

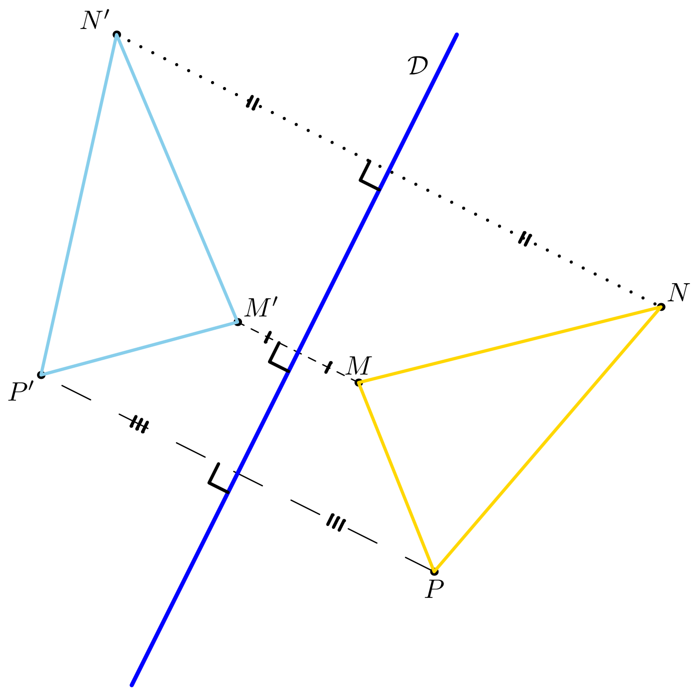
Définition XXI-7

*La **réflexion** d'axe $\mathcal{D}$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que*

- ▷ *si $M\notin\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[MM']$*
- ▷ *si $M\in\mathcal{D}$, $M=M'$*

et la petite figure

3. Tiens, tiens...



Mathémator : Et la démonstration utilise des triangles isocèles, des triangles isométriques et semblables : je vous laisse vous en occuper.

Nous avons trouvé *des* similitudes, mais le problème, maintenant, est de savoir s'il existe d'autres similitudes et de les déterminer. Pour nous simplifier la vie, nous allons utiliser un outil encore tout frais ...

B - FORME COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE

B - 1 : Conservation des angles non orientés

Mathémator : Comme nous le verrons bientôt [4] les angles sont intimement liés au produit scalaire.

Propriété XXI-1

Soient M, N et P trois points du plan d'images respectives M', N' et P' par une similitude de rapport k. Alors

$$\overrightarrow{M'N'} \cdot \overrightarrow{M'P'} = k^2 \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$$

Pour s'en convaincre, il faudrait utiliser une formulation du produit scalaire n'utilisant que les normes, car nous n'avons que les distances à notre disposition. Vous vous souvenez sûrement [5] que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}|| - ||\overrightarrow{v}||\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)\end{aligned}$$

4. Voir la construction du produit scalaire page **??**
5. et nous commenterons abondamment ce résultat page **??**

Nous obtenons ici

$$\overrightarrow{M'N'} \cdot \overrightarrow{M'P'} = \frac{1}{2}\left(M'N'^2 + M'P'^2 - N'P'^2\right) = \frac{1}{2}\left(k^2MN + k^2MP - k^2NP\right) = k^2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$$

Nous pouvons enfin relier le produit scalaire aux angles non orientés par la formule [6]

$$\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||}$$

avec $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ l'unique antécédent de $\dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||}$ par la fonction cosinus dans $[0,\pi]$.

qui vous permettra de démontrer pendant vos nuits blanches que

Propriété XXI-2
Une similitude conserve les angles géométriques

Téhessin : Pourquoi précisez-vous « angles géométriques » ? J'ai découvert depuis longtemps les angles orientés.

Mathémator : Si vous regardez bien la propriété du produit scalaire rappelée juste au-dessus, vous remarquerez qu'il n'est fait question que d'angles mesurés dans $[0,\pi]$, c'est à dire d'angles géométriques. Cela va jouer un rôle primordial par la suite, car nous dstinguerons deux grandes familles de similitudes : celles qui conservent les angles orientés, qu'on qualifiera de similitudes directes, et les autres, qu'on nommera similitudes indirectes.

B - 2 : Conservation des angles orientés

Mathémator : Pour faciliter notre travail, nous disposons depuis peu de l'outil complexe : c'est un peu moins joli que la géométrie pure, mais cela nous permet de gagner un peu en concision.

Téhessin : Je vois : au lieu de couler à moins dix mille mètres, vous me proposer de suffoquer en surface. J'apprécie votre humanité.

Mathémator : Reprenons nos trois petits points M, N et P d'affixes m, n et p et leurs images par une similitude respectivement primées.

Notons $Z = \dfrac{p-m}{n-m}$ et $Z' = \dfrac{p'-m'}{n'-m'}$. Comment interprétez-vous géométriquement ces deux nombres ?

Téhessin : C'est toujours pareil [7] : en fait $Z = \dfrac{z_{\overrightarrow{MP}}}{z_{\overrightarrow{MN}}}$ et idem pour les primes. Alors

- ▷ $|Z| = \dfrac{MP}{MN}$ et $|Z'| = \dfrac{M'P'}{M'N'}$
- ▷ $\arg Z = \left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)$ et $\arg Z' = \left(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{M'P'}\right)$

Mathémator : Certes, mais vous n'avez pas agit en spécialiste : une similitude étant en jeu, certaines propriétés sont conservées.

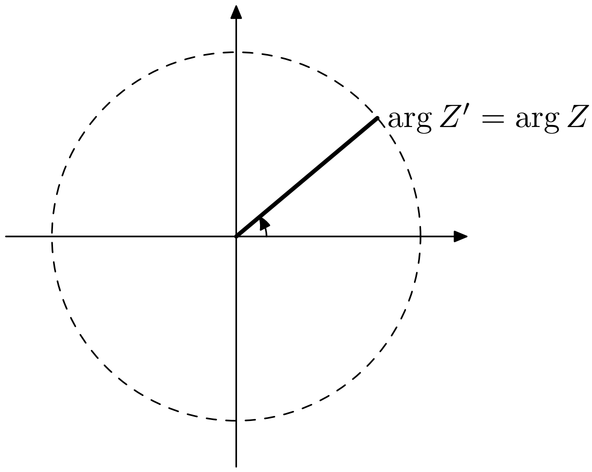
Téhessin :

- ▷ Les rapports de distances se conservent, donc $|Z| = MP/MN = M'P'/M'N' = |Z|$
- ▷ Les angles non orientés se conservent, mais là, je ne vois pas trop comment faire intervenir les complexes.

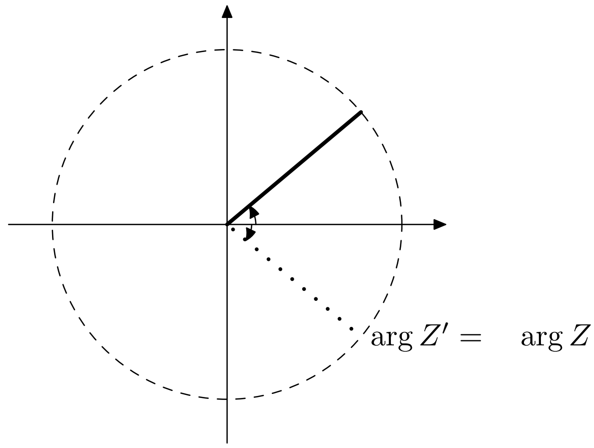
Mathémator : Les mesures des arguments sont définies à 2π près, donc on peut choisir leurs valeurs principales dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$. Pour faire le lien avec les angles non orientés, il suffit de remarquer que la mesure de l'angle non orienté est en fait la valeur absolue de l'angle mesuré dans $]-\pi,\pi]$ [8]

6. voir page **??**
7. Quel frimeur ce Téhessin, quand on voit ce qu'il donne à l'écrit...
8. On est un peu gêné aux entournures par la vague définition de l'argument en terminale, mais on ferme un peu les yeux et on comprend bien ce qui se passe.

Résumons-nous : $|Z'| = |Z|$ et $\arg Z' = \pm \arg Z$, donc deux cas se présentent selon le plus ou le moins



$Z' = Z$



$Z' = \overline{Z}$

B - 3 : Forme complexe d'une similitude directe

Mathémator : Nous sommes donc dans le cas $Z = Z'$. Nous allons reprendre les formules utilisées précédemment en choisissant $p = z$, $n = 1$ et $m = 0$. Qu'obtenons-nous?

Téhessin : $Z' = \dfrac{z' - m'}{n' - m'} = Z = \dfrac{z - 0}{1 - 0} = z$. Oui, et alors?

Mathémator : N'oubliez pas que nous cherchons une expression complexe d'une transformation du plan, donc une relation de la forme $z' = f(z)$.

Téhessin : Bon, alors $z' - m' = z(n' - m')$ i.e. $z' = (n' - m')z + m'$, mais je ne vois pas l'intérêt puisqu'on ne connaît ni m', ni n'. On tourne un peu en rond.

Mathémator : Détrompez-vous ! Nous venons de montrer que si s est une similitude directe, alors *nécessairement* sa forme complexe doit être du style $z \mapsto az + b$ avec a et b des nombres complexes, a étant non nul. D'ailleurs, pourquoi $a \neq 0$?

Téhessin : Ben, a c'est $n' - m'$, donc il faudrait que $n' \neq m'$, mais on n'en sait rien a priori, ça dépend de s.

Mathémator : Eh non ! Une similitude est une transformation, donc puisque n, qui vaut 1, et m, qui vaut 0, sont distincts, leurs images le seront aussi.

Il reste un problème : est-ce que toutes les transformations du type $z \mapsto az + b$ sont des similitudes directes? Cela revient à montrer qu'une telle transformation conserve les rapports de distance et les angles orientés : à vous de jouer, Téhessin, en ayant bien à l'esprit que nous travaillons avec des nombres complexes.

Théorème XXI-2

Les similitudes directes sont LES transformations d'écriture complexe

$$z \mapsto az + b$$

avec a et b des complexes, a étant non nul.

B - 4 : Forme complexe d'une similitude indirecte

Mathémator : On procède comme précédemment, mais maintenant $Z = \overline{Z}$. Je vous laisse montrer que

Théorème XXI-3
Les similitudes indirectes sont LES transformations d'écriture complexe

$$z \mapsto a\overline{z} + b$$

avec a et b des complexes, a étant non nul.

B - 5 : Rapport d'une similitude

Mathémator : La forme complexe d'une similitude étant donnée, comment déterminer le rapport de la similitude ?

Téhessin : Je considère deux points M et P et leurs images M' et P' et je calcule $M'P'/MP$

$$\frac{M'P'}{MP} = \left|\frac{p'-m'}{p-m}\right| = \left|\frac{ap+b-am-b}{p-m}\right| = \left|\frac{a(p-m)}{p-m}\right| = |a|$$

Mathémator : Je suis d'accord, sauf que vous n'avez réglé le cas que des similitudes directes.

Téhessin : Désolé, c'est encore si frais dans mon esprit

$$\frac{M'P'}{MP} = \left|\frac{p'-m'}{p-m}\right| = \left|\frac{a\overline{p}+b-a\overline{m}-b}{p-m}\right| = \left|\frac{a(\overline{p}-\overline{m})}{p-m}\right| = |a|\,\frac{|\overline{p-m}|}{|p-m|} = |a|$$

Donc ça marche encore et j'énonce moi-même la propriété

Propriété XXI-3
Une similitude d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\overline{z}+b$ admet pour rapport $|a|$

B - 6 : Forme exponentielle d'un nombre complexe

Mathémator : Avant d'aller plus loin, nous allons avoir besoin d'un petit outil technique. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + i\sin x$. C'est une fonction un peu spéciale puisqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ mais est à valeurs dans $\mathbb{C}$. Que vaut $f(0)$?

Téhessin : $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$: jusqu'ici, tout va bien.

Mathémator : Je vous demande à présent un petit effort d'imagination : on peut supposer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en considérant i comme un coefficient quelconque et en extrapolant les formules de dérivations des fonctions à valeurs réelles. Qu'est-ce que ça peut donner ?

Téhessin : $f'(x) = -\sin x + i\cos x$

Mathémator : Essayez alors de faire le lien avec $f(x)$.

Téhessin : $f'(x) = i(i\sin x + \cos x) = if(x)$: oui, et alors ?

Mathémator : Récapitulons : f vérifie $f' = if$ avec $f(0) = 1$. Ça ne vous rappelle rien ?

Téhessin : Ciel ! Ma fonction exponentielle ! On avait $f' = kf$ et $f(0) = 1$ alors on en concluait que $f(x) = e^{kx}$.

Mathémator : Donc vous ne serez pas choqué si nous écrivons, par convention d'écriture à notre niveau, que $f(x) = \exp(ix) = e^{ix}$.

Notation exponentielle
On convient d'écrire, pour tout réel x

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

Notez au passage que les formules d'additions sont alors plus faciles à retrouver. En effet, $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$, donc

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\cos a\sin b + \cos b\sin a)$$

Alors, par unicité de la forme algébrique d'un complexe, on obtient :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \cos a\sin b + \cos b\sin a$$

Voici une illustration du côté extrêmement pratique de l'outil complexe.

C - ÉCRITURE COMPLEXE DES TRANSFORMATIONS USUELLES

C - 1 : Translations

Mathémator : Considérons la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ d'affixe b et les habituels points M et M' d'affixes z et z'. Par définition, on a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}$. Traduisez ceci à l'aide de l'outil complexe.

Téhessin : Facile : $z_{\overrightarrow{MM'}} = z' - z = b$, i.e. $z' = z + b$. Impeccable, car on retrouve une expression du type $az + b$, donc c'est bien une similitude directe de rapport $|a| = |1| = 1$, donc une isométrie : c'est sûr que ça commence à me plaire de travailler avec les complexes.

Mathémator : J'espère que vous n'êtes pas ironique. Notons ce résultat au passage

> **Propriété XXI-4**
> *La transformation complexe définie par*
> $$z \mapsto z + b$$
> *est la translation de vecteur d'affixe b*

C - 2 : Rotations

Mathémator : Essayez de vous débrouiller avec la rotation de centre C d'affixe c et d'angle de mesure α.

Téhessin : Bon, on sait que $\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}\right) = \alpha = \arg\dfrac{z'-c}{z-c}$ et $CM' = CM$, donc $\dfrac{CM'}{CM} = 1 = \left|\dfrac{z'-c}{z-c}\right|$. Donc $(z'-c)/(z-c)$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument de mesure α. On peut à la rigueur écrire $(z'-c)/(z-c) = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Tout ceci ne nous mène pas à grand chose.

Mathémator : Au contraire ! Mais avant tout, vous avez un CM au dénominateur, il faut donc s'assurer qu'il est non nul, donc que $M \neq C$. On verra ensuite si on rattraper le coup. Pour ce qui est de l'interprétation, nous pouvons utiliser un outil tout juste découvert quelques lignes plus haut : un complexe de module 1 et de mesure congrue à α modulo 2π s'écrit $e^{i\alpha}$.

Ainsi $(z'-c) = e^{i\alpha}(z-c)$. Vous remarquerez que cette formulation reste valable si $z = c$: en effet, $c' = c$ car le centre de la rotation est invariant.

Téhessin (à part) : Là, je vais lui clouer le bec...**(tout haut)** Et je suppose qu'on vérifie que, réciproquement, toutes les transformations de ce style sont des rotations d'angle α. Finalement, toute rotation s'exprime sous la forme $z' = ze^{i\alpha} + b$.

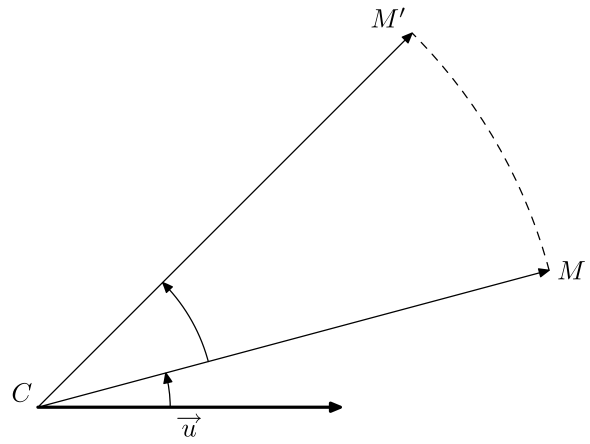
Mathémator : Justement non, et c'est pourquoi ces vérifications ne sont pas anodines : en effet, si $\alpha \equiv 0[2\pi]$, nous sommes bien embêtés car nous obtenons une translation de vecteur d'affixe b.

Propriété XXI-5
La transformation complexe définie par

$$z \mapsto ze^{i\alpha} + b$$

est une rotation d'angle α avec $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$

En fait, ça se comprend. Notons $z - c = re^{i\theta}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CM}$, alors $z' - c = re^{i\theta}e^{i\alpha} = re^{i(\alpha+\theta)}$, ce qui peut se traduire par : « on garde la même distance, on tourne de α »



C - 3 : Homothéties

Mathémator : Pas grand chose à dire ici. Avec les notations habituelles, on obtient $\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}$, d'où $z' - c = k(z - c)$, i.e. $z' = kz + c(1 - k)$. Ainsi une homothétie a une représentation complexe de la forme $z \mapsto kz + b$.

Téhessin (à part) : Soyons prudent...**(tout haut)** Il faut faire attention : on ne doit pas avoir $z = z + b$ qui nous fait retomber sur une translation, donc k doit être différent de 1.

Mathémator : Vous progressez, mon brave Téhessin. Pour éviter toute confusion, nous prendrons l'habitude de commencer notre étude par la recherche des points invariants : c'est ce que nous verrons un peu plus loin dans notre étude générale des similitudes.

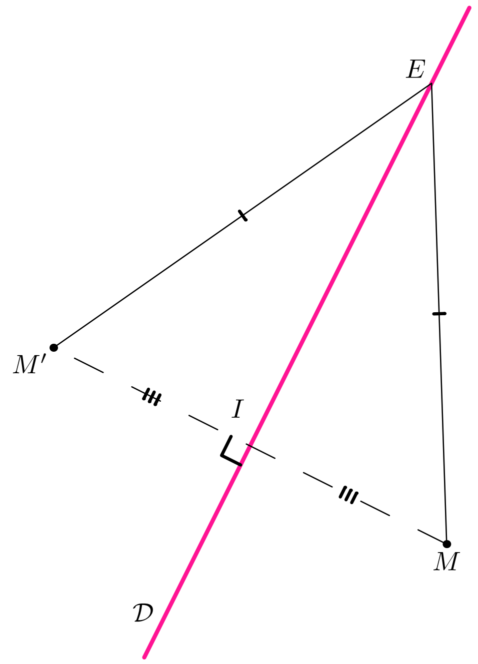
Propriété XXI-6
La transformation complexe définie par

$$z \mapsto kz + b \quad \textit{avec} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

est une homothétie de rapport k

C - 4 : Réflexions

Mathémator : Les réflexions sont plus difficilement exploitables vectoriellement, donc aussi à la sauce complexe. Observons malgré tout le dessin suivant



On remarque que $\left(\overrightarrow{EI},\overrightarrow{EM'}\right) = -\left(\overrightarrow{EI},\overrightarrow{EM}\right)$. Ainsi une réflexion ne conserve pas les angles orientés et s'écrit donc sous forme complexe $z \mapsto a\overline{z} + b$. Mais toute transformation de ce style n'est pas une réflexion. Nous le prouverons bientôt.

D - COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

D - 1 : Composition de deux similitudes

Mathémator : Nous pouvons prouver de deux manières au moins que la composée de deux similitudes est encore une similitude. Tout d'abord en utilisant le moins d'outils, i.e. en n'utilisant que la définition et la première propriété pour parler du rapport.

Considérez donc deux points M, P et deux similitudes s et s' de rapports k et k'. Montrez que $s \circ s'$ est encore une similitude et trouvez le rapport de cette similitude.

Téhessin : Il faudrait montrer que le rapport $\dfrac{s \circ s'(M)s \circ s'(P)}{MP}$ est constant. Help !

Mathémator : Que pensez-vous de $\dfrac{s\big(s'(M)\big)s\big(s'(P)\big)}{s'(M)s'(P)}$?

Téhessin : Comme s est une similitude de rapport k, et bien ça vaut k. Mais ce n'est pas le bon dénominateur !

Mathémator : Encore une fois, quand vous n'avez pas ce que vous voulez, faîtes-le apparaître !

Téhessin : Je veux $\dfrac{s\big(s'(M)\big)s\big(s'(P)\big)}{MP} = \dfrac{s\big(s'(M)\big)s\big(s'(P)\big)}{s'(M)s'(P)} \times \dfrac{s'(M)s'(P)}{MP}$ C'est magique, on obtient que la rapport fait toujours kk', donc ça marche !

Mathémator : C'est beau cette rusticité des moyens utilisés. Sinon, vous pouvez toujours opter pour l'outil complexe : on pose $s(z) = az + b$ et $s'(z) = a'z + b'$.

Téhessin : En faisant ça, vous éliminez les similitudes indirectes.

Mathémator : Bien joué ! Il faudra donc traiter vous-même les autres cas. En attendant, occupons-nous de ce cas-ci.

Téhessin : $s(s'(z)) = a'(az+b)+b' = aa'z + a'b + b'$, donc c'est une similitude de rapport $|aa'|$.

Mathémator : C'est à dire de rapport $|a| \times |a'|$, donc on retombe sur nos pattes.

> **Propriété XXI-7**
> *La composée d'une similitude de rapport k et d'une similitude de rapport k' est une similitude de rapport kk'*

D - 2 : Réciproque

Mathémator : Lâchons un instant nos similitudes et retournons sur les bancs du collège : vous avez découvert en 4ème l'inverse d'un nombre x non nul : on vous l'a défini comme l'unique nombre x^{-1} tel que $x \times x^{-1} = 1$.

Cette année, nous avons parlé de fonctions réciproques, notamment au moment d'introduire la fonction logarithme. Nous avions dit qu'une fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur un intervalle I si set seulement si $f \circ f^{-1}(x) = x$ pour tout élément x de I.

Essayons d'élargir le débat grâce au petit aparté suivant

> **Structure de groupe multiplicatif**
> Soit G un ensemble non vide et muni d'une loi de composition interne (i.e. le produit de deux éléments de G est encore dans G) associative (i.e. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$) notée $\cdot$.
> On dit que $(G,\cdot)$ est un groupe lorsque
> - ▷ la loi admet un élément neutre e (i.e. $a \cdot e = e \cdot a = a$ pour tout $a \in G$)
> - ▷ tout élément a de G admet un symétrique noté a^{-1} (i.e. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$)
>
> Par exemple, $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe, $(\mathbb{Z},+)$ aussi. Trouvez ainsi d'autres exemples de groupes qui ne soient pas forcément des ensembles de nombres.

L'idée est maintenant de vérifier si des fois, par le plus grand des hasards, l'ensemble des similitudes du plan muni de la composition des transformations ne serait pas un groupe.

Téhessin : Appelons $\mathcal{S}$ l'ensemble des similitudes du plan. Si j'ai bien compris, il faut commencer par vérifier que $\mathcal{S}$ est non vide : il contient les translations, les homothéties et tout le bataclan, donc pas de problème.

Il faut maintenant vérifier que la composition des similitudes est une loi de composition interne : pas de problème, nous venons de le voir au paragraphe précédent.

La composition des transformations est associative de manière évidente.

Maintenant, il s'agit de trouver un élément neutre. Par exemple la translation de vecteur nul.

Mathémator : Où une rotation d'angle nul, où une homothétie de rapport 1 : en fait, toutes ces transformations sont une seule et même transformation qu'on appellera *identité* et qu'on notera $\mathcal{I}d$ et qui envoie tout point sur lui-même.

Téhessin : Soit ! Il ne reste plus qu'à trouver un symétrique pour chacun. D'après ce que nous avons vu tout à l'heure, si $s \circ s' = \mathcal{I}d$, alors $kk' = 1$, donc il suffit de prendre $k' = 1/k$.

Mathémator : Mouais, enfin faites tout de même attention. Si je m'en tiens à ce que vous venez d'énoncer, je pourrais être tenté de dire qu'une similitude de rapport k étant donnée, il suffit de trouver une similitude de rapport $1/k$ et le tour est joué. Or considérons une rotation et une réflexion non triviales : leurs rapports valent tous deux 1, donc leur produit vaut 1 aussi, donc elles sont réciproques l'une de l'autre, ce qui n'est pas vraiment le cas.

Mieux vaut énoncer votre résultat sous cette forme : « la transformation réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $1/k$ », mais il reste à prouver *l'existence* d'une telle transformation. Tentez votre chance avec l'expression complexe.

Téhessin : Si s est une similitude directe, avec les notations habituelles $z' = az + b$. Il faut chercher une éventuelle réciproque vérifiant $z' = (1/a)z + \beta$ d'après ce que nous venons de voir. Appelons z'' l'affixe du point $s \circ \sigma(M)$, alors $z'' = a((1/a)z + b) + \beta = z + ab + \beta$: il suffit donc de choisir $\beta = -ab$ et le tour est joué.

Mathémator : Il reste quand même à vérifier que ça marche encore dans le sens $\sigma \circ s$ et aussi pour les similitudes indirectes : je vous laisse le faire. Maintenant nous pouvons écrire

Propriété XXI-8
Toute similitude de rapport k admet une transformation réciproque qui est une similitude de rapport $1/k$

À titre d'exercice, je vous laisse déterminer les réciproques des similitudes usuelles. pour l'heure, ces petites considérations nous permettent à présent d'énoncer un théorème fort intéressant :

Théorème XXI-4
Toute similitude de rapport k est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie

Ce résultat, extraordinaire s'il en est, va nous permettre de voir un peu plus clair dans cet amas de transformations jusqu'ici mystérieux. Il reste un détail : la preuve de ce théorème.

Un petit Joker pour vous mettre sur la piste : avec des notations évidentes, $h \circ i$ est bien une similitude comme composée de similitudes. Éliminons h pour savoir qui est i : $h^{-1} \circ h \circ i = i = h^{-1} \circ s$. Si s est une similitude quelconque de rapport k, pour que $h^{-1} \circ s$ soit une isométrie, il faut que le rapport de h^{-1} soit $1/k$, donc le rapport de h vaut k. Voilà pour l'analyse : si s est la composée d'une homothétie et d'une isométrie, alors le rapport de l'homothétie est égal au rapport de la similitude.

Prenons maintenant le problème par le bon bout : on part d'une similitude quelconque de rapport k. Composons-la avec une homothétie H de rapport $1/k$, alors $f = H \circ s$ est une similitude de rapport $k \times 1/k = 1$, donc c'est une isométrie. Ainsi, s s'écrit sous la forme $s = H^{-1} \circ f$ et le tour est joué.

Bien, le cours grossit et nous avons toujours aussi peu d'exercices à nous mettre sous la dent. Pour essayer d'abréger un peu, nous allons étudier plus spécifiquement, comme nous le demande le programme, les similitudes directes.

E - SIMILITUDES DIRECTES

E - 1 : Points fixes

Mathémator : Notre outil principal pour étudier une similitude va être la recherche des POINTS FIXES. Un point M est dit fixe s'il est égal à son image, c'est à dire si $z = z' = az + b$. Cette équation a-t-elle toujours des solutions?

Téhessin : $az + b = z \iff z(1 - a) = b \iff z = b/(1 - a)$: il y a toujours un point fixe qui est d'affixe $b/(1 - a)$.

Mathémator : Mon petit Théhessin, vous avez des problèmes en ce moment, votre petite amie vous tourmente l'esprit, dites-moi tout.

Téhessin : Qu'est-ce qui vous prend ?!?

Mathémator : Il me prend, bougre de triple âne borgne élevé au jus de moule, qu'en terminale on se pose des questions avant d'invoquer l'inverse de $1 - a$!

Téhessin : Tout doux mon bon maître, j'avais, il est vrai, l'esprit ailleurs. Il faut en effet commencer par étudier le cas $a = 1$, alors $z' = z + b$. Nous sommes alors en présence soit de l'identité si b est nul, et alors tout point du plan est fixe, soit d'une translation non triviale et alors aucun point n'est fixe.

Mathémator : Bon, je passerai l'éponge sur votre petit oubli de tout à l'heure et je vais traiter l'autre cas pour être sûr de garder mon calme.

Si $a \neq 1$, alors s admet un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = b/(1 - a)$...

Téhessin : ... qui existe car a est différent de 1.

Mathémator : C'est bon, c'est bon, faut pas non plus en faire des tonnes. De $z' = az + b$ et $\omega = a\omega + b$, on tire $z' - \omega = a(z - \omega)$. Soit $ke^{i\theta}$ la forme exponentielle de a. Nous obtenons

$$(z' - \omega) = k \times e^{i\theta}(z - \omega)$$

Que reconnaissez-vous ?

Téhessin : Élémentaire, ô lumière au bout de mon tunnel. Je vois que la similitude s est la composée de la rotation de centre Ω et d'angle θ avec l'homothétie de même centre et de rapport k.

Mathémator : J'aime pas les fayots

Théorème XXI-5

Soit s une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$, alors

▷ *si $a = 1$, s est la translation de vecteur d'affixe b (éventuellement nul)*

▷ *sinon, s est la composée, dans un ordre quelconque*
  - *de l'homothétie de centre le point fixe et de rapport $|a| = k$*
  - *de la rotation de même centre et d'angle $\theta = \arg(a)[2_p i]$*

L'écriture complexe est alors $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$, avec ω l'affixe du point fixe.

Mais ce n'est pas tout :

Classification des similitudes directes selon les points fixes

Soit s une similitude directe du plan

▷ *si s n'admet pas de point fixe, alors c'est une translation*

▷ *si s admet au moins deux points fixes, alors c'est l'identité*

▷ *si s admet un unique point fixe, alors c'est la composée d'une rotation et d'une homothétie de centre le point fixe*

E - 2 : Similitudes directes et couples de points

Mathémator : Nouveau problème qui va souvent se présenter à vos yeux ébaubis : on considère quatre points M, N, M' et N' tels que $M \neq N$ et $M' \neq N'$: existe-t-il une similitude directe transformant M en M' et N en N' ?

Puisque je ne vous ai pas fait de cadeau de Noël cette année, voici un petit coup de pouce : utilisez les expressions complexes.

Téhessin : Oh merci Phare de la connaissance universelle, vous êtes trop bon.

Avec des notations évidentes, je suppose qu'il s'agit de trouver un couple de complexes (a,b) tels que $m' = am+b$ et $n' = an + b$. Merci du cadeau, mais je ne vois pas trop ce que je peux faire de ça.

Mathémator : Voyons : deux inconnues, deux équations, ça ne vous dit rien ?

Téhessin : Bon sang, mais c'est bien sûr : on résout un système d'inconnues a et b

$$\begin{cases} am + b &= m' \\ an + b &= n' \end{cases} \iff \begin{cases} a(m - n) = m' - n' \\ b = m' - am \end{cases}$$

Or, je précise bien que $m \neq n$, donc j'obtiens finalement

$$a = \frac{m' - n'}{m - n} \qquad b = m' - a\frac{m' - n'}{m - n}$$

Mathémator : Et vous vous rendez compte que vous avez brillamment obtenu que non seulement une telle similitude existe, mais qu'en plus elle est tunique.

Théorème XXI-6
Étant donnés quatre points M, N, M' et N' tels que $M \neq N$ et $M' \neq N'$, il existe une unique similitude transformant M en M' et N en N'

Téhessin : En fait, on n'a pas besoin que M' et N' soient distincts : on ne risque la division par zéro (j'ai bien retenu la leçon) que si $M = N$.

Mathémator : Certes, mais si $m' = n'$, alors $a = 0$ et on peut dire au revoir à notre similitude.

Ce théorème nous aidera dans le cadre d'une résolution purement géométrique, et dans le cas d'une résolution algébrique, sa démonstration nous indique un moyen de déterminer explicitement la similitude.

Il ne nous reste plus qu'à voir des propriétés que vous avez admises intuitivement depuis des années.

E - 3 : Effet des similitudes sur les droites, cercles e tutti quanti

Mathémator : Les propriétés déjà connues des similitudes doivent vous permettre de conclure rapidement, en commençant par exemple par les cercles.

Téhessin : Un cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance R de O, donc $M \in \mathcal{C}(O,R) \Longleftrightarrow OM = R$ or, avec les notations habituelles, $O'M' = kOM$, dès lors

$$M \in \mathcal{C}(O,R) \Longleftrightarrow OM = R \Longleftrightarrow O'M' = kR \Longleftrightarrow M' \in \mathcal{C}(O',R')$$

Mathémator : Bien joué ! L'image d'un cercle par une similitude est donc un cercle de centre, l'image du centre et de rayon k fois le rayon initial.

L'autre grand renseignement concerne la conservation des angles. Comment caractériseriez-vous des points alignés à l'aide d'angles.

Téhessin : Disons que A, B et C sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv 0[\pi]$

Mathémator : Parfait ! Toujours avec les notations habituelles, on a $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)[\pi]$, donc

$$A,\ B \text{ et } C \text{ alignés } \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv 0[\pi] \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right) \equiv 0[\pi] \Longleftrightarrow A',\ B' \text{ et } C' \text{ alignés}$$

Conclusion ?

Téhessin : L'image d'une droite par une similitude est une droite.

Mathémator : Remarquez que nous n'avons toujours pas précisé si la similitude est directe ou non.

Pour terminer, un morceau de choix : la conservation des barycentres, si chers à votre cœur depuis l'année dernière.

Rappelons la propriété caractéristique en l'adaptant à la sauce complexe

Propriété caractéristique des barycentres
Le point G est barycentre du système $(A_i,\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ si et seulement si

▷ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

▷ $\displaystyle z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_{A_i}}{\sum_{i=1} n\alpha_i}$

Je vous laisse alors vérifier à l'aide de l'expression complexe des similitudes que ces dernières conservent les barycentres, ce qui nous permettra de parler de l'image de segments, de triangles, etc.

Une dernière mission : reprenez tout ce que nous avons fait concernant les similitudes directes et adaptez les résultats au similitudes indirectes. Je vous livre pour vous rassurez la conclusion

Classification des similitudes indirectes selon les points fixes

Soit s une similitude indirecte du plan

▷ *si s n'admet pas de point fixe, alors c'est une symétrie glissée, i.e. la composée d'une réflexion et d'une translation*

▷ *si s admet au moins deux points fixes, alors c'est une réflexion d'axe l'ensemble des invariants*

▷ *si s admet un unique point fixe, alors c'est la composée d'une symétrie axiale ou glissée et d'une homothétie de centre le point fixe*

F - EXERCICES

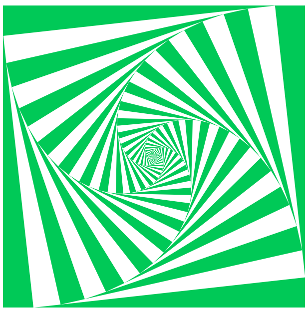
Exercice XXI-1

Voici un petit programme MetaPost qui m'a permis de tracer la figure suivante :


```
    beginfig(9)
transform T; u:=1cm;
z0=(0,0); z1=(2u,0); z3=z1 rotated 90; z2=z1+z3;
z0 transformed T =0.1[z0,z1];
z1 transformed T = 0.1[z1,z2];
z2 transformed T = 0.1[z2,z3];
path p; p=z0-z1-z2-z3-cycle;
fill p withcolor red;
fill p transformed T withcolor white;
endfig;
```

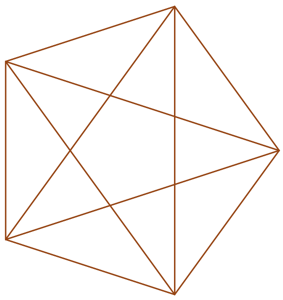
Que vous inspire-t-il ?

Et que vous inspire cette nouvelle figure ?



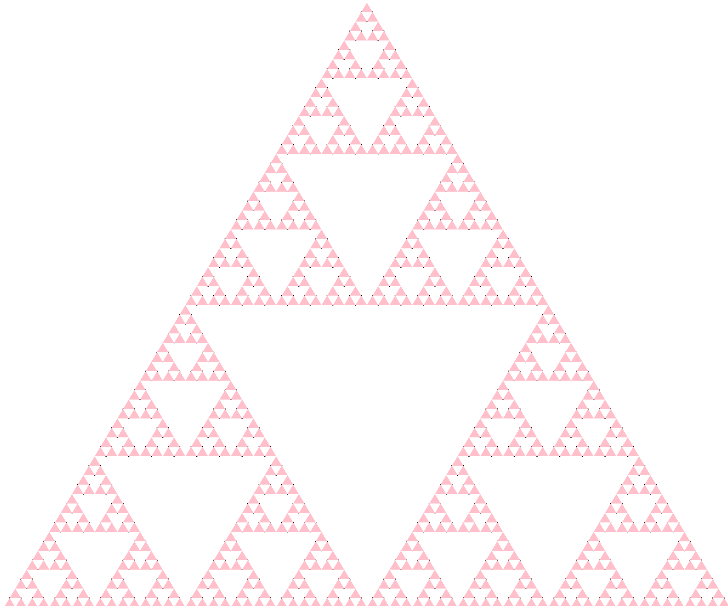
Exercice XXI-2

Comment passe-t-on du grand pentagone régulier au petit ?



Exercice XXI-3

Décrivez cette figure à l'aide de similitudes.



Pour information, voici le programme Metapost correspondant à cette figure

```
beginfig(12)
 u:=8cm;
 vardef serp(expr a,b,c,n)=
 save aa, bb, cc; pair aa, bb, cc; path p,pp;
 aa=0.5[a,b]; bb=0.5[b,c]; cc=0.5[a,c];
 if n>1: serp(a,aa,cc,n-1); serp(aa,b,bb,n-1); serp(cc,bb,c,n-1);
 else: draw aa-bb-cc-cycle; p=a-b-c-cycle; pp=aa-bb-cc-cycle; fill p withcolor rose; fill pp
withcolor white;
 fi;
 enddef;
pair A,B,C; A=(0.6u,u); B=(0,0); C=(1.2u,0); serp(A,B,C,6);
 endfig;
```

Exercice XXI-4

Soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux carrés directs. Comment passe-t-on du premier au deuxième

1) si l'on suppose que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles ?
2) sinon ? Vous pourrez dans ce cas introduire P, Q, R et S, les points d'intersection respectifs de (AB) et $A'B')$, (BC) et $(B'C')$, (CD) et $(C'D')$, (DA) et $(D'A')$ ainsi que le point O, intersection de (PR) et (QS).

Exercice XXI-5 Style Bac avec ROC

On considère un triangle $\mathrm{OA_0B_0}$ rectangle isocèle en O et tel que la distance $\mathrm{A_0B_0}$ soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}, \overrightarrow{\mathrm{OB_0}}\right)$ est un angle droit direct.
On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante

- A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;
- B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par raoport à la droite $(\mathrm{O}B_n)$.

1) Représenter le triangle $\mathrm{OA_0B_0}$, puis construire les points $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_3}$.
2) a) **Démonstration de cours.** Démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme $\mathrm{A_0}$ en $\mathrm{A_1}$ et $\mathrm{B_0}$ en $\mathrm{B_1}$.

b) Soit s cette similitude : préciser son angle et son rapport, puis vérifier que son centre est O. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la similitude s transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1}.

3) a) Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus modulo 4.

b) On désigne par Ω le point d'intersection des droites $(\mathrm{A_0B_4})$ et $(\mathrm{B_0A_4})$. Démontrer que le triangle $\mathrm{A_0\Omega B_0}$ est isocèle en Ω.

c) Calculer la distance $\mathrm{A_0B_4}$.

d) Démontrer que $\Omega\mathrm{A_0} = 4\Omega\mathrm{B_4}$.

e) En déduire l'aire du triangle $\mathrm{A_0\Omega B_0}$.

Exercice XXI-6

Le triangle ABC est direct rectangle en A. Le point D est le pied de la hauteur issue de A. On note I et J les centres des cercles inscrits dans les triangles ABD et ACD. La droite (IJ) coupe (AB) en P et (AC) en Q.

1) Montrez que les triangles ABD, ADC et DJI sont directement semblables.

Considérez la similitude de centre D qui transforme C en A

2) Montrez que le triangle APQ est isocèle.

Pensez angles

Exercice XXI-7

On construit extérieurement à un triangle ABC les triangles PBC, QCA, BCT et RAB tels que $\widehat{PBC} = \widehat{PCB} = 15°$, $\widehat{QCA} = \widehat{RBA} = 45°$, $\widehat{QAC} = \widehat{RAB} = 30°$ et BCT est équilatéral.

Montrez que $PQ = PR$ et que $(PQ)\perp(PR)$.

Considérez les similitudes s_1 et s_2 de centres B et C qui transforment R en A et A en Q puis étudiez $s_2 \circ s_1$

Exercice XXI-8

Soit ABC un triangle et A', B' et C' les centres de gravité des trois triangles équilatéraux accolés extérieurement à chacun des côtés de ABC.

Pensez complexes et exprimez $b' - a'$ et $c' - a'$ en fonction de a, b et c.

Que pensez-vous du triangle $A'B'C'$?

Exercice XXI-9

Soient A et B deux points distincts du plan. Déterminez toutes les isométries qui échangent A en B, c'est à dire telles que $f(A) = B$ et $f(B) = A$.

Pensez au milieu

Exercice XXI-10

Soit ABC un triangle équilatéral. Déterminez les isométries laissant globalement invariant ce triangle, i.e. telles que $f(\{A,B,C\}) = \{A,B,C\}$.

Exercice XXI-11

On munit le plan d'un repère orthonormé direct. Déterminez les éléments caractéristiques de la similitude directe qui transforme A en A' et B en B' avec

$$A(1,1) \quad A'(2,1) \quad B(1,-1) \quad B'(4,-1)$$

Exercice XXI-12

Soit z un nombre complexe non nul. Dans le plan complexe, soient A, B, C, D et E les points d'affixes respectives z, z^2, z^3, z^4 et z^5.

1) Montrez que si A, B, C et D sont sur un même cercle, alors E aussi.

Introduisez une similitude.

2) Déterminez les nombres complexes z tels que A, B, C, D et E soient cocycliques.

Exercice XXI-13 Réflexion d'axe (OA)

Soit A le point d'affixe $e^{i\theta/2}$. Montrez que la réflexion d'axe (OA) a pour écriture complexe

$$z' = e^{i\theta}\overline{z}$$

Exercice XXI-14 Symétrie glissée

La symétrie glissée d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation $\sigma = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\mathcal{D}}$.

1) Montrez que $\sigma = s_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$.
2) Le point M ayant pour image M', montrez que le milieu I de $[MM']$ appartient à $\mathcal{D}$ et que $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.
3) Étudiez $\sigma \circ \sigma$.
4) Que vous inspire la figure ci-dessous ?

Exercice XXI-15 Bac

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soient les points A, A′, B et B′ d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 - 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{A}'} = -2 + 4\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 3 - \mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}'} = 5\mathrm{i}.$$

1) a) Placer les points A, A′, B et B′ dans le plan complexe. Monter que ABB′A′ est un rectangle.
   b) Soit s la réflexion telle que s(A)=A′ et s(B)=B′. On note (Δ) son axe.
   Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.
   c) On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z.
   Montrer que

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + 2\mathrm{i} - 1.$$

2) Soit g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + 5 - \mathrm{i}.$$

   a) On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.
   b) Soit Ω le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
   Montrer que C et D sont les images respectives de A′ et B′ par h.
   c) Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3) On pose $f = h^{-1} \circ g$.

   a) Déterminer l'expression complexe de f.

b) Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

Exercice XXI-16 Bac

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1) Faire une figure.
2) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   a) Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.
   b) Déterminez les images de R et de P par r.
   c) Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS.

3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   a) Déterminez les images respectives de R et de P par s.
   b) Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?
   c) Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

Exercice XXI-17 Bac

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2 + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 1 + 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{C}} = 6 + 3\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{D}} = -1 + 6\mathrm{i}.$$

1) Représenter les points A, B, C et D.
2) Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$.
   Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.
3) Soit J le point d'affixe $3 + 5\mathrm{i}$.
   Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.
4) On appelle I le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$, M et N les milieux respectifs de segments [AC] et [BD].
   Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère IMJN.
5) On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD sont des carrés directs.

   a) Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q.
   b) Déterminer $\dfrac{\mathrm{I}P}{\mathrm{IA}}$ et $\dfrac{\mathrm{I}Q}{\mathrm{IC}}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}}, \overrightarrow{\mathrm{I}P}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{IC}}, \overrightarrow{\mathrm{I}Q}\right)$.
      En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(\mathrm{A}) = P$ et $g(\mathrm{C}) = Q$.
   c) En déduire que J est l'image de M par g. Que peut-on en déduire pour J ?

Exercice XXI-18 Bac

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1 + \mathrm{i}$, $3 + 2\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\sqrt{2}$.

1) On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{2}\right).$$

a) Calculer les affixes des points $\mathrm{A}' = f(\mathrm{A})$ et $\mathrm{C}' = f(\mathrm{C})$.
b) En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.
c) Placer les points A, B et C puis construire le point $\mathrm{B}' = f(\mathrm{B})$.

2) a) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
b) Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe $z'' = (1+\mathrm{i})\overline{z} - 1 + 3\mathrm{i}$.

3) a) Soit M_0 le point d'affixe 2 - 4 i.
Determiner l'affixe du point $\mathrm{M}_0'' = g(\mathrm{M}_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}_0''}$ sont orthogonaux.
b) On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}''}$ sont orthogonaux si, et seulement si $5x + +3y = -2$.
c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x + 3y = -2$.
d) En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6 \ ; \ 6]$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

Exercice XXI-19 Bac

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 1 cm).
On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

Partie A

1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.
2) Soit I le point d'affixe 1.
On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.
Sa position initiale est en I.
On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $\mathcal{C}$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).
On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\frac{\pi}{3}$cm (respectivement $\frac{\pi}{5}$ cm).
Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $\mathcal{C}$ à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.
2) On pose :
$S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul),
$S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul), et $f = S'_n s_1 \circ S_m$.
a) Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\frac{\pi}{3} + n\frac{6\pi}{5}$.
b) f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?
c) On appelle M le point d'affixe 6 et M′ son image par f.
Peut-on avoir $\mathrm{OM}' = 240$?
Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique (m, n) tel que $\mathrm{OM}' = 576$.
Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right)$.

Exercice XXI-20 Bac

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique 3 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que

$$\mathrm{a} = 3 \qquad \mathrm{b} = 1 + \frac{2}{3}\mathrm{i} \qquad \mathrm{c} = 3\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \mathrm{d} = -\frac{1}{3}\mathrm{i}.$$

1) Représenter les points A, B, C et D.
2) Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D.
3) Donner l'écriture complexe de s. En déduire l'affixe du centre I de s.
4) Soit M le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ son image par s.

   Montrer que : $\begin{cases} x' &= -\dfrac{1}{3}y + 1 \\ y' &= \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} \end{cases}$
5) On construit une suite (M_n) de points du plan en posant

$$\begin{cases} \mathrm{M}_0 = \mathrm{A} \\ \text{et, pour tout entier naturel } n \\ M_{n+1} = s(M_n) \end{cases}$$

   Pour tout entier naturel, on note z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n = |z_n - 1|$.

   a) Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\mathrm{I}M_k \leqslant 10^{-3}$.