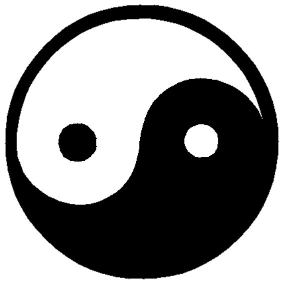
Quatrième Aventure

FONCTIONS RÉCIPROQUES



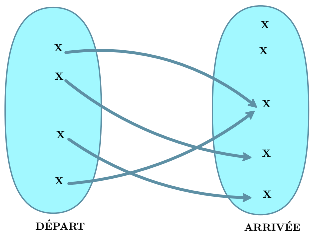
Résumé Nous allons nous occuper d'un problème important : une fonction f envoie x vers $f(x)$. Existe-t-il un moyen pour revenir vers x ?

I - ÉTUDE THÉORIQUE

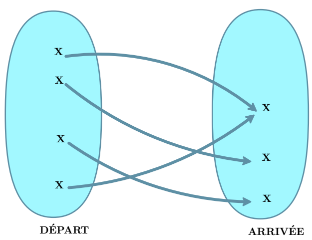
A - BIJECTION - INJECTION - SURJECTION

A - 1 : Parlons patate

Une fonction f envoie tout élément de l'ensemble de départ vers un unique élément de l'ensemble d'arrivée.



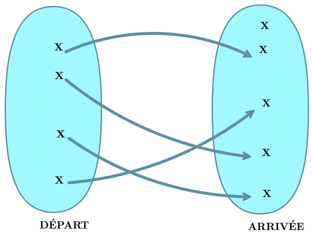
On remarque que certains éléments de l'ensemble d'arrivée ne sont pas reliés à un antécédent de l'ensemble de départ. Si en revanche tout le monde admet un antécédent, la fonction est alors SURJECTIVE



Définition IV-1 Surjection

Une fonction $f : E \to F$ est **surjective** si et seulement si tout élément de F admet **au moins un antécédent** dans E.
Cela revient à dire que $f(E) = F$

On remarque également que certains éléments de l'ensemble d'arrivée ont plusieurs antécédents. Si au contraire, tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent, la fonction est INJECTIVE.

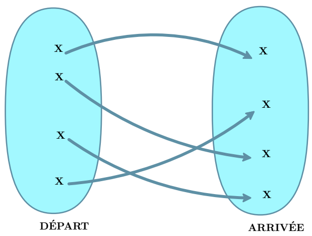


Définition IV-2 Injection

Une fonction $f : E \to F$ est **Injective** si et seulement si tout élément de F admet **au plus un antécédent** dans E.
Cela revient à dire qu'il n'existe pas 2 éléments de E qui ont la même image, ou encore que

$$f \text{ injective} \iff \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)$$

Maintenant, on voudrait que le « retour » de F sur E soit également une fonction : il faut que tout élément de F admette un et un seul antécédent par f, c'est à dire « au moins et au plus » un antécédent par f, c'est à dire que f soit à la fois injective et surjective. On dit alors qu'elle est bijective.



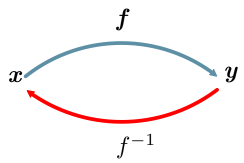
Définition IV-3 Bijection

Une fonction est bijective si elle est à la fois injective et surjective

A - 2 : Parlons fonction

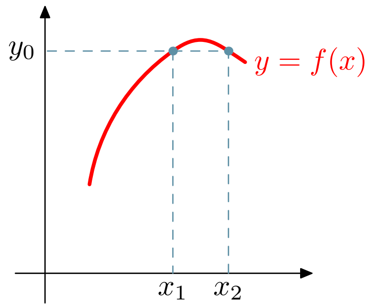
Considérons une fonction f définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à un réel x de I associe un réel y. Nous voudrions savoir si nous pouvons définir une fonction « retour » qui permette, à partir de y, de revenir à x. On l'appelle une telle fonction une **fonction réciproque** et on la note f^{-1}. On a donc $f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = id$ avec id la fonction *identité* [1].

1. Notez au passage que ça ressemble à l'inverse d'un réel : $x \cdot x^{-1} = 1$ où 1 est « l'identité » du produit des réels...



Il faut donc que f^{-1} soit une fonction et donc que, à tout réel y de l'ensemble d'arrivée on associe un unique élément x de l'ensemble de départ. Il faut donc que f soit **bijective**.

Résumons : il y a un seul y dans $f(I)$ tel que $f(x) = y$. Il faut qu'il y ait un seul x dans I tel que $x = f(y)$
Par exemple, il y a un problème pour la figure suivante

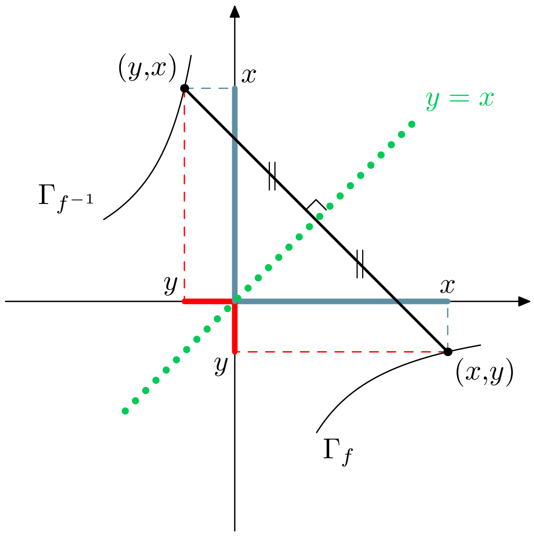


Le problème vient du fait que f change de sens de variation. Nous en avons déjà parlé au premier chapitre, il faut que f soit strictement monotone pour que f soit injective. Pour la surjectivité, il suffit de prendre comme ensemble image $f(i)$, d'où

Théorème IV-1 Bijectivité des fonctions numériques
Soit I un intervalle et soit $f : I \to f(I)$. Alors f est bijective si et seulement si f est strictement monotone sur I

A - 3 : Parlons graphique

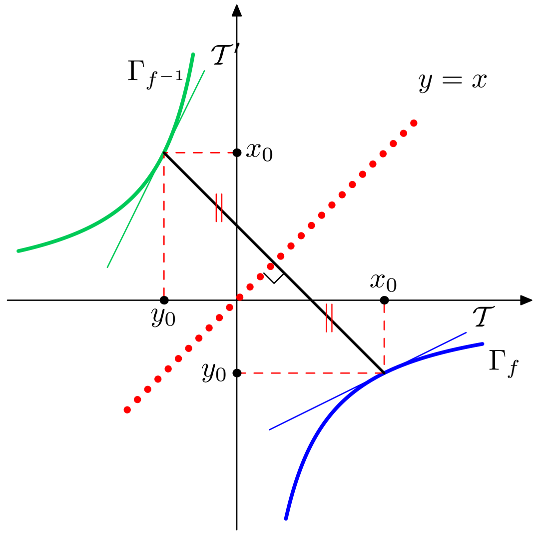
Supposons que notre fonction f est strictement croissante de I sur $f(I)$, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(I)$. Peut-on déduire le graphe de f^{-1} à partir de celui de f ? Observez ce dessin



Une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ encore appelée première bissectrice règle le problème.

A - 4 : Parlons dérivée

Adaptons un peu le dessin précédent et observons les tangentes



Intuitivement, en faisant bouger « mentalement » le point de tangence, on « sent » que plus la pente de $\mathcal{T}$ sera faible, plus celle de $\mathcal{T}'$ sera forte.
En effet, l'équation de $\mathcal{T}$ est

$$\mathcal{T} \ : \ y = y_0 + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

Or la symétrie par rapport à la première bissectrice échange les rôles de x et y, donc $\mathcal{T}'$ admet pour équation $x = y_0 + (y - x_0) \cdot f'(x_0)$, c'est à dire, si $f'(x_0) \neq 0$

$$\mathcal{T}' \ : \ y = x_0 + (x - y_0) \cdot \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{si } f'(x_0) \neq 0$$

On obtient donc le théorème suivant

Théorème IV-2 Dérivée de la réciproque

Soit I et I' deux intervalles et $f \ : \ I \to I'$ une bijection, et soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. On suppose que f est dérivable en x_0

- ▷ si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0
- ▷ si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

On en déduit que f et f^{-1} ont le même sens de variation.

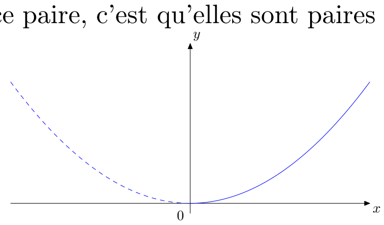
.

II - RÉCIPROQUES DES FONCTIONS USUELLES

A - FONCTIONS PUISSANCES

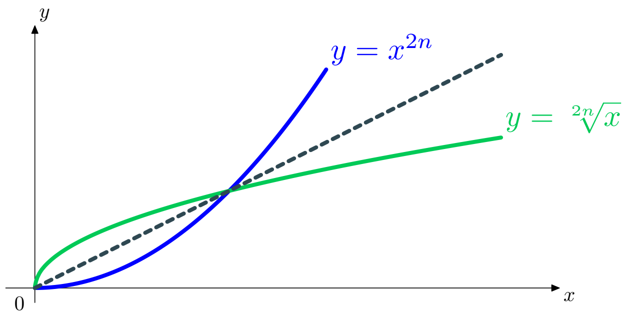
A - 1 : Puissances paires

Le problème avec les fonctions puissance paire, c'est qu'elles sont paires et donc non monotones sur $\mathbb{R}$



On s'occupera donc de la restriction de ces fonctions à $\mathbb{R}^+$. On notera $\sqrt[2n]{}$ la réciproque de la fonction $x \mapsto x^{2n}$
On obtient les tableaux de variations suivants :

et les courbes

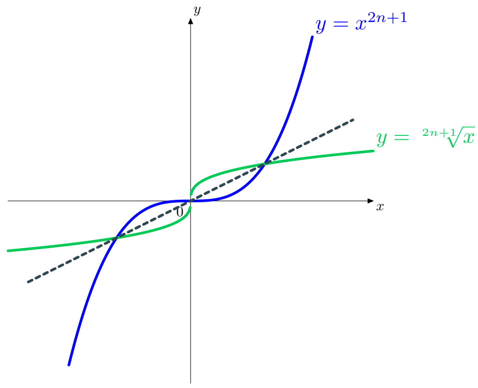


A - 2 : Puissances impaires

Cette fois-ci les fonctions puissance impaire sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, donc on peut définir une réciproque sur $\mathbb{R}$

On obtient les tableaux suivants :

et les tracés



Enfin, n'oubliez pas que $\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}$

B - FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES RÉCIPROQUES

B - 1 : Réciproque de sinus

B - 1 - a : Définition

La fonction sinus n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$, comme vous le savez tous. Mais si on se place sur $[-\pi/2,\pi/2]$, les choses s'arrangent comme on le voit sur la courbe :

La restriction de sinus à $[-pi/2,\pi/2]$ est strictement croissante et continue et est à valeurs dans $[-1,1]$: c'est donc une bijection de $[-\pi/2,\pi/2]$ sur $[-1,1]$. On peut donc définir une fonction réciproque sur $[-1,1]$, qu'on appelle arcsinus et qu'on note Arcsin.

Théorème IV-3 Fonction Arcsinus
On définit sur $[-1,1]$ la fonction réciproque de la fonction sinus

$$\text{Arcsin} : \begin{array}{rcl} [-1,1] & \rightarrow & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto & \text{Arcsin}\, x \end{array}$$

avec pour tout $x \in [-1,1]$

$$\sin(\text{Arcsin}\, x) = x$$

Ainsi vous retiendrez que

$y = \text{Arcsin}\, x$ signifie « y est le réel (l'arc) compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont le sinus vaut x »

Par exemple $\text{Arcsin}(1/2) = \pi/6$ car $\sin(\pi/6) = 1/2$ mais attention au sens inverse :

⚠ $\text{Arcsin}\big(\sin(5\pi/6)\big) \neq 5\pi/6$ car Arcsin est à valeurs dans $[-\pi/2,\pi/2]$
Pour résoudre ce problème, il faut chercher un élément de $[-\pi/2,\pi/2]$ ayant le même sinus que $5\pi/6$. Il s'agit évidemment de $\pi/6$ (voir le formulaire de trigo pour les mémoires défaillantes).
Ainsi $\text{Arcsin}\big(sin(5\pi/6)\big) = \pi/6$

B - 1 - b : Variations

On sait déjà quel va être le sens de variations de Arcsin puisque c'est le même que celui de la restriction de sin sur $[-\pi/2,\pi/2]$. Nous allons quand même calculer sa dérivée qui nous servira plus tard à calculer des intégrales.
Nous avons vu à la section précédente que, avec $y = f(x)$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

pour des valeurs de y telles que $f'(x) \neq 01$ Ici $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$ et $f^{-1}(y) = \text{Arcsin}\, y$, d'où

$$\text{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\cos\left(\text{Arcsin}(y)\right)}$$

pour $\cos x \neq 0$, c'est à dire pour $x \notin \{-\pi/2,\pi/2\}$.
Oui, mais nous ne sommes pas très avancés : que vaut $\cos\left(\text{Arcsin}(y)\right)$? Nous savons juste que $\sin\left(\text{Arcsin}(y)\right) = y$.
Il faudrait donc transformer l'écriture pour « mettre en contact » sin et Arcsin.
Or nous savons que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, donc $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, c'est à dire ici

$$\cos^2\left(\text{Arcsin}(y)\right) = 1 - \sin^2\left(\text{Arcsin}(y)\right) = 1 - y^2$$

Ainsi $\sqrt{\cos^2\left(\text{Arcsin}(y)\right)} = \left|\cos\left(\text{Arcsin}(y)\right)\right| = \sqrt{1-y^2}$. Or $\text{Arcsin}\, y \in [-\pi/2,\pi/2]$, donc $\cos\left(\text{Arcsin}\, y\right) \geqslant 0$ c'est à dire que

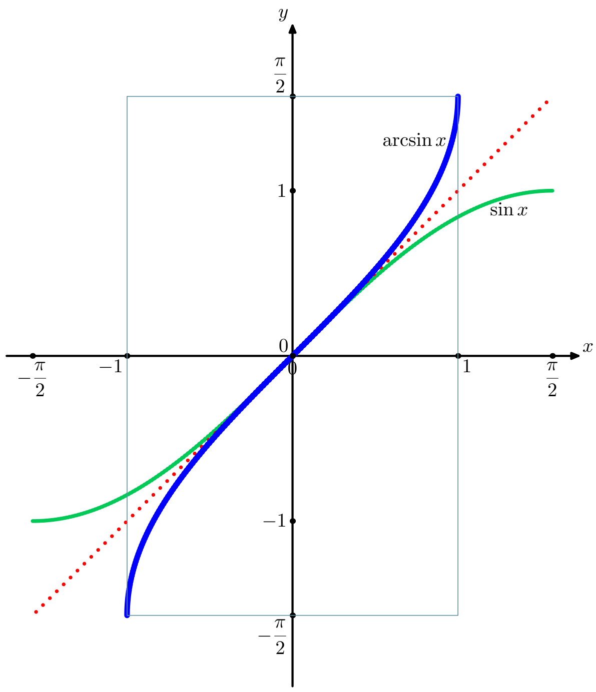
$$\left|\cos\left(\text{Arcsin}\, y\right)\right| = \cos\left(\text{Arcsin}\, y\right) = \sqrt{1-y^2}$$

Finalement

Propriété IV-1 Dérivée de Arcsin
La fonction Arcsin est dérivable sur $]-\pi/2,\pi/2[$ et

$$\text{Arcsin}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

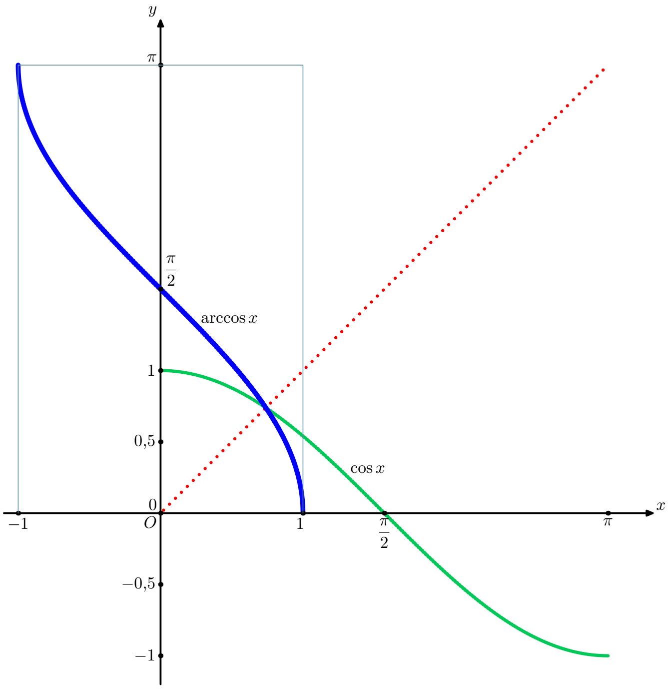
Il est ensuite aisé d'obtenir le tracé suivant



B - 2 : Réciproque de cosinus

Á vous de jouer

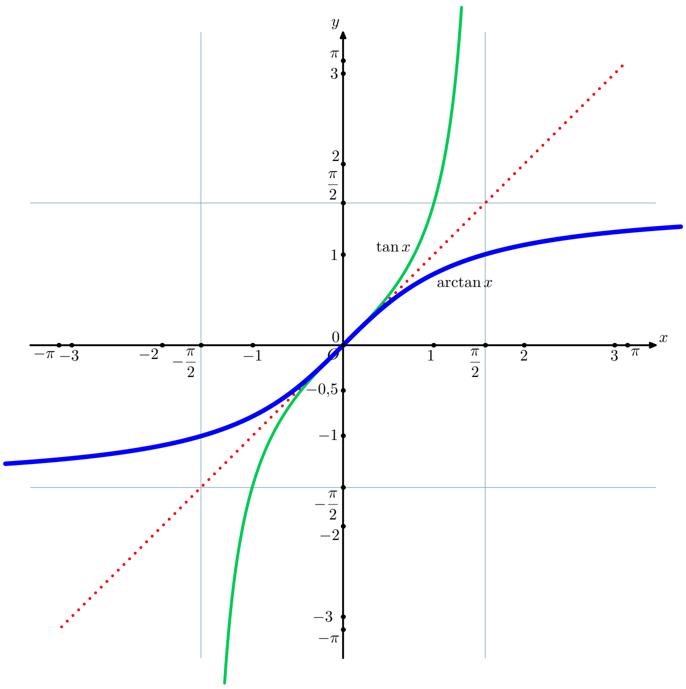
.



B - 3 : Réciproque de tangente

Décidemment, il ne fallait pas sécher aujourd'hui

.



y
x
$\tan x$
$\arctan x$
O
0
$-\pi$ -3 -2 $-\frac{\pi}{2}$ -1 1 $\frac{\pi}{2}$ 2 3 π
π 3 2 $\frac{\pi}{2}$ 1 $-0{,}5$ -1 $-\frac{\pi}{2}$ -2 -3 $-\pi$

.

III - FORMULAIRE DE TRIGO

- **Formules**

  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

  $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, pour $a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

  $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$, pour $a-b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k' \in \mathbb{Z}$

- **Transformation de produits en somme**

  $\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2} \cdot (\cos(a+b) + \cos(a-b))$

  $\sin a \cdot \sin b = \dfrac{1}{2} \cdot (\cos(a-b) - \cos(a+b))$

  $\sin a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2} \cdot (\sin(a+b) + \sin(a-b))$

- **Transformation de sommes en produits**

  $\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p-q}{2})$

  $\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \sin(\dfrac{p-q}{2})$

  $\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p-q}{2})$

  $\sin p - \sin q = 2 \cdot \sin(\dfrac{p-q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p+q}{2})$

- **Formules de duplication**

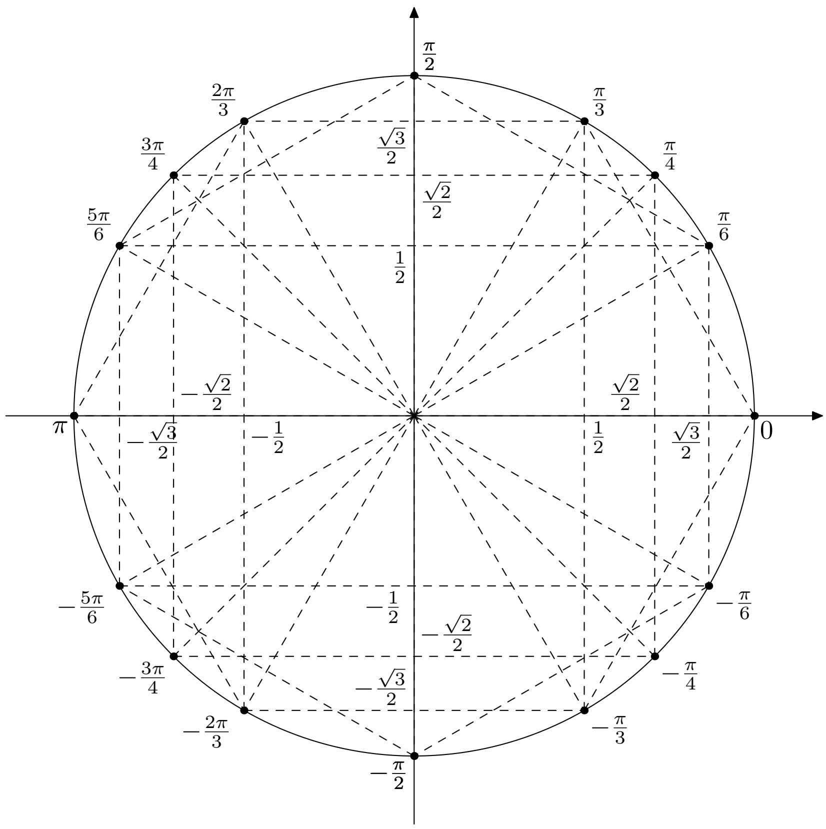
  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

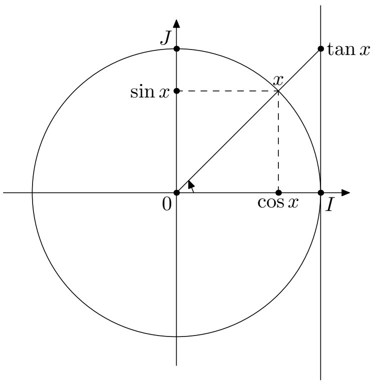
  $\sin(2x) = 2 \cos x \sin x$

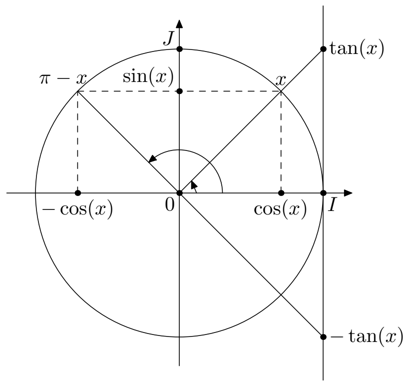
  $\tan(2x) = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$

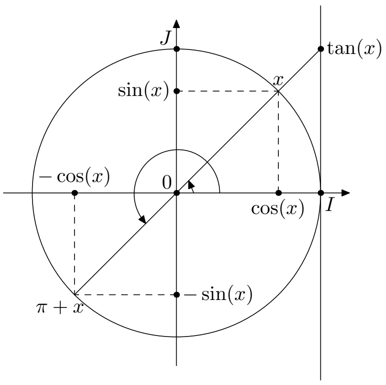
  Avec $t = \tan(\dfrac{x}{2})$, on a :

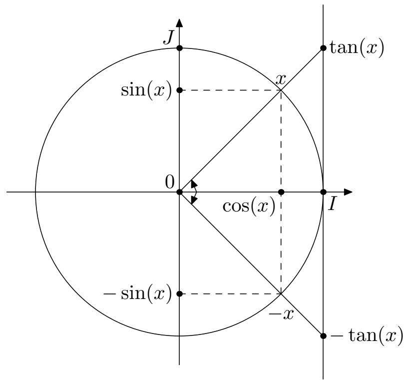
  $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
0
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
π
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{6}$


J
$\tan x$
$\sin x$
x
0
$\cos x$
I


J
$\tan(x)$
$\pi - x$
$\sin(x)$
x
$-\cos(x)$
0
$\cos(x)$
I
$-\tan(x)$


J
$\tan(x)$
$\sin(x)$
x
$-\cos(x)$
0
$\cos(x)$
I
$\pi + x$
$-\sin(x)$


J
$\tan(x)$
$\sin(x)$
x
0
$\cos(x)$
I
$-\sin(x)$
$-x$
$-\tan(x)$