SEIZIÈME LEÇON

LOI DE PROBABILITÉ DISCRÈTE

Résumé
Historiquement, les calculs de probabilités ont été tout d'abord utilisés pour étudier l'argent que pouvaient espérer gagner les princes au jeu.
De nos jours, ces calculs sont abondamment utilisés en physique, en chimie, en biologie, en économie, en démographie, etc. Malgré tout, le vocabulaire employé reste lié au jeu.
Nous découvrirons surtout la notion de **variable aléatoire** que nous retrouverons lors de l'étude des probabilités à densité.

I - UN EXEMPLE POUR DÉCOUVRIR

L'éducation coûte trop cher. Afin de réaliser des économies, le gouvernement syldave a décidé de se passer à la fois de correcteurs et d'élèves. Tout est simulé dans les bureaux du ministère, le but étant d'obtenir une moyenne nationale satisfaisante à présenter aux investisseurs étrangers qui se rueront en Syldavie pour profiter d'une main d'œuvre aussi qualifiée.
Le candidat virtuel jette un dé virtuel : s'il sort un 6, il a 20, s'il tombe sur un autre numéro pair il a 10, s'il tombe sur un numéro impair, il a 5.
Quelle moyenne nationale peut *espérer* obtenir le ministre ? Cette moyenne est-elle une moyenne ? Cette moyenne sera-t-elle effectivement atteinte ?

Les derniers syldaves touchant un salaire pour leur travail coûtent encore trop cher aux entreprises. Un nouveau système de rémunération a donc été mis au point par l'ancien ministre de l'éducation syldave installé aujourd'hui au ministère des finances.
Pour garder son emploi, le salarié doit chaque mois verser 1000 neurones à l'entreprise puis doit lancer un dé. S'il sort un 6, il touche 3000 neurones : les 1000 versés au départ par le salarié plus 2000 versés par l'entreprise. Dans les autres cas, l'entreprise garde les 1000 neurones.
Quelle salaire un employé peut-il espérer toucher ?
Que se passera-t-il si l'entreprise propose 5000 neurones au lieu des 2000 ? Et si elle propose 1 000 000 000 de neurones avec un dé à 100 faces pour un versement initial de 1 000 000 de neurones ?

II - LA THÉORIE

Vous vous souvenez que l'$univers$ probabilisable, souvent noté Ω, est constitué de toutes les « éventualités » ou « issues » d'une expérience aléatoire.
Avant de parler de lois de probabilités, penchons nous sur le terme *discrètes* : il traduit le fait que l'on peut « dénombrer » chacune des issues ; on peut leur donner un numéro. Nous étudierons plus tard dans l'année des lois de probabilité $continues$: on ne pourra pas donner un numéro à chacune des issues ; par exemple, on ne peut pas compter tous les nombres réels compris entre 2 et 3.

Définition 1 Variable aléatoire
Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ un univers muni d'une probabilité. On appelle **variable aléatoire** toute fonction de Ω dans ℝ.

Soit $x_1, \cdots, x_k$ les différentes valeurs prises par la fonction X.
On note $\{X = x_i\}$ l'événement « la variable aléatoire prend la valeur x_i ». Il se note rigoureusement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$, ce qui se lit « l'ensemble des ω tels que $X(\omega) = x_i$ ».

Définition 2 Loi de probabilité
Soit (Ω, p) un univers muni d'une probabilité p et X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par

$$\varphi : x \mapsto p(X = x)$$

Remarque : si $x \notin \Omega$, alors $(X = x) = \emptyset$ et donc $p(X = x) = 0$.
Définir *la loi de probabilité d'une expérience aléatoire* reviendra donc à :

- déterminer toutes les valeurs possibles $x_1, \cdots, x_n$ prises par X ;
- calculer les probabilités $p_1, \cdots, p_n$ des événements correspondants ;
- regrouper les résultats dans un tableau du type

Valeurs prises par X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilité correspondante $p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Vous n'oublierez pas de vérifier que $p_1 + \cdots + p_n = 1$ d'après le principe des probabilités totales.

Définition 3 Espérance mathématique
On appelle **espérance mathématique** de la variable aléatoire X le nombre noté $\mathbb{E}(X)$ défini par

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \cdots + x_n \times p(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(X = x_i)$$

La même chose sous un autre angle : puisque nous n'étudierons que des situations où l'univers n'est constitué que d'un nombre fini d'éléments, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

C'est ce que nous faisons en pratique : pour décrire le comportement d'une variable aléatoire, nous étudions son action sur chaque événement élémentaire. Ces événements élémentaires formant une partition de l'univers, on a

Théorème 1 Espérance mathématique : autre formulation
Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ l'univers. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) \cdot p(\omega_i)$$

Exemple : on lance un dé honnête. On définit la variable aléatoire X qui prend la valeur 2 si le numéro du dé est pair et 1 sinon. Notons ω_i l'événement « le numéro de la face est i », alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ et

i	1	2	3	4	5	6
$p(\omega_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$X(\omega_i)$	1	2	1	2	1	2

D'après le théorème précédent, on a $\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$

Nous aurions pu procéder autrement pour définir la loi de probabilité

Valeurs prises par X	1	2
Probabilité correspondante $p(X = x_i)$	1/2	1/2

alors, d'après la définition, $\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

a. Variance

La variance mesure l'« écart » par rapport à l'espérance en faisant la somme des carrés des « distances » entre chaque valeur prise par la variable aléatoire et l'espérance pondérés par la probabilité correspondante, ce qui donne

Définition 4 Variance

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)^2 \cdot p(X = x_i)$$

Remarque : on a choisi d'utiliser les carrés de manière arbitraire pour ne pas avoir de problèmes de signes ; on aurait pu choisir une autre méthode, mais celle-ci a l'avantage de rappeler la distance euclidienne bien connue. La variance est en ce sens homogène au carré d'une distance. On va donc définir une distance proprement dite en en prenant la racine carrée : c'est ce qu'on appelle l'écart-type.

Définition 5 Écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarque : vous pouvez obtenir espérance, variance et écart-type très simplement à l'aide des modules statistiques de vos calculatrices. Il suffit de rentrer les valeurs prises par la variable aléatoire en liste 1, les probabilités correspondantes en liste 2.

b. Linéarité de l'espérance

À partir de variables aléatoires existantes, on peut en créer de nouvelles.
Avec des notations usuelles on obtient

- $aX + b : \omega_i \mapsto aX(\omega_i) + b$ avec a et b des réels.
- $X + Y : \omega_i \mapsto X(\omega_i) + Y(\omega_i)$

À l'aide du théorème 2, démontrez les propriétés suivantes :

Propriétés 1

- $\mathbb{E}(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) \times p(X = x_i) = a\mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Exemple : on lance deux dés honnêtes. On définit la variable aléatoire X qui prend la valeur 2 si le numéro du premier dé est pair et 1 sinon et la variable aléatoire Y qui prend la valeur 2 si le numéro du deuxième dé est pair et 1 sinon. On note $Z = X + Y$. Définissez les lois de probabilité respectives de X, Y et Z et calculez les espérances et les variances associées.

III - DES EXERCICES POUR METTRE EN PRATIQUE

Exercice 1 Manipulation de formules

Montrez que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$

Exercice 2 Espérance vs écart-type : les dés

On lance deux dés honnêtes. On note X la variable aléatoire qui donne le plus grand des numéros obtenus et Y celle qui donne le plus petit.
Donnez les lois de chacune des deux variables ainsi que les espérances et les variances.

Exercice 3 Espérance vs écart-type : la roulette.

Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36 dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte.
Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne deux fois sa mise si la couleur choisie sort.
Un joueur qui mise sur un numéro de 1 à 36 gagne 36 fois sa mise si le numéro sort.
Il est interdit de miser sur le zéro.

1. Un joueur mise a € sur une couleur. Soit C la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouvez la loi de C puis calculez $\mathbb{E}(C)$ et $\sigma(C)$.

$$\sigma(C) = \frac{6a\sqrt{38}}{37}$$

2. Un joueur mise a € sur un numéro. Soit N la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouvez la loi de N puis calculez $\mathbb{E}(N)$ et $\sigma(N)$.

$$\sigma(N) = \frac{216a}{37}$$

3. Vaut-il mieux miser sur une couleur ou un numéro ?

Exercice 4 Compétition syldave

Prschtr, le champion syldave de danse sous-marine nocturne en scaphandre de 150 kg est inquiet avant la finale. Trois de ses figures l'inquiètent. La probabilité de réussir la première est de 0,95, la deuxième de 0,93 et la troisième de 0,9.
On suppose que le moral de Prschtr est à toute épreuve et les réussites de ses figures sont indépendantes.

1. Quelle est la probabilité que Prschtr réussisse ses trois figures ?

2. Quelle est la probabilité d'en manquer une seule ?

3. D'en manquer deux ?

4. De manquer les trois ?

5. Dresser alors le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de sauts réussis. Claculer $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma(X)$.

6. Manquer la première figure fait perdre 0,2 point et la deuxième ou la troisième 0,1 point. Les pénalités s'ajoutent.
Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le total des points de pénalités ? Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 5 Crise du logement Syldave

Le ministre syldave du logement doit faire face à une surpopulation syldave galopante. Il propose donc le jeu suivant à la population :
le ministre dispose d'un pistolet à six coups chargé de trois balles. Le joueur tire jusqu'à ce qu'une balle vienne frapper sa boîte crânienne, le ministre faisant tourner le barillet entre chaque essai. Si la tête du candidat explose dès le premier coup, l'État verse 2 neurones à la famille du défunt et le jeu s'arrête ; si c'est au deuxième coup, la famille reçoit 4 neurones ; si le bang arrive au troisième coup, le ministre débourse 2^3 neurones, etc.

1. Soit X la variable aléatoire qui donne le gain en neurones de la famille. Montrez que l'espérance mathématique est infinie et que donc chaque syldave a intérêt à jouer...

2. Que se passe-t-il si le ministre ne dispose que de 1000000 de neurones ? Quelle participation le ministre peut-il alors demander pour rentrer dans ses frais ?

Exercice 6 Aviation syldave

On considère les deux avions de la compagnie Syldavian Death Air : un biréacteur B et un triréacteur T.
On suppose que tous les moteurs sont identiques, ont la même probabilité p de tomber en panne sur une période donnée et qu'ils sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de réacteurs tombant en panne sur B et Y celle qui donne le nombre de réacteurs tombant en panne sur T.

1. Donnez les lois de probabilité de X et Y en fonction de p. *(Pour résoudre ce problème d'avions, on pourra s'aider d'arbres.)*

2. Calculez les espérances mathématiques correspondantes.

3. B a besoin d'au moins un réacteur, sinon il tombe au milieu de l'océan ; T a lui besoin de deux réacteurs pour arriver à destination.

a) Calculez, en fonction de p, la probabilité P_B que le biréacteur traverse l'océan sans encombre.

b) Calculez la probabilité correspondante P_T pour T.

c) Dans quel avion préférez-vous monter pour traverser l'océan ?

IV - PARADOXE ?

Exercice 7 Paradoxe syldave

Le problème est simple : prenons deux boîtes identiques A et B dont l'une contient deux fois plus de balles de revolver que l'autre, mais vous ignorez laquelle. La situation est donc totalement symétrique. Pourtant un expert, qui ignore également quelle est la boîte la mieux lotie en balles de revolver, affirme au ministre syldave qu'il faut choisir la boîte B ! Son raisonnement semble imparable : soit n le nombre de balles de revolver dans la boîte A, alors la boîte B en contient soit $2n$, soit $n/2$ avec à chaque fois une probabilité de $1/2$. Donc on peut calculer l'espérance mathématique du nombre de balles de revolver dans la boîte B.

$$\mathbb{E} =$$

Stupeur ! Il vaut mieux choisir la boîte B. Or nous aurions pu tenir exactement le même raisonnement en inversant les rôles de A et B pour aboutir à la conclusion inverse. Nous aboutissons à un magnifique paradoxe. Quel est le problème ?

Supposez qu'il y a cinq balles dans A

Exercice 8 Hasard ?

Un ordinateur affiche un nombre entier à l'écran de manière aléatoire. Peut-il y avoir équiprobabilité dans le choix de cet entier ?

Exercice 9 Élection syldave

En Syldavie, l'élection présidentielle se joue à la cravate. Le candidat qui a la moins longue cravate devient ipso facto président de la République syldave et garde la cravate de son adversaire.
La veille de l'élection, le candidat Joe Max Bill Pol réfléchit, allongé dans son lit : « ma cravate a pour longueur L. Si ma cravate est la plus longue, ce qui a une chance sur deux de se produire, je la perds, donc je perds une cravate de longueur L. Sinon, je gagne la cravate de l'autre qui est plus longue que L. Donc une fois sur deux je perds L et une fois sur deux je gagne plus que L. Mon espérance est donc positive donc je suis confiant ». Son adversaire tient bien sûr le même raisonnement...

Exercice 10 Le modèle fait la probabilité

Encore un problème stupide : *Dans un parc il y a trois bancs à deux places. Roger et Ginette vont s'asseoir « au hasard ». Quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent sur le même banc ?*
On parle de « hasard », donc d'équiprobabilité, mais de quelles issues : les bancs ou les places ? C'est souvent le problème des calculs de probabilités : pour un même problème, plusieurs modèles peuvent être utilisés pour arriver à des résultats parfois différents.
Ici, montrer que, selon le modèle choisi, la réponse peut-être 1/3 ou 1/5. Y a-t-il un modèle plus pertinent ?
Il sera donc important de préciser le modèle choisi avant tout calcul.

Exercice 11 Quelques notions sur les sommes de variables aléatoires

Ce n'est pas vraiment au programme... mais si vous jetez un coup d'œil sur l'exercice 25 page 18 qui vient de tomber au Bac et par expérience, mieux vaut être prudent...

V - BAC

Exercice 12

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif (c'est- à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T_1 l'évènement : « le premier test est positif ».
On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
Déterminer les probabilités des évènements T_1, et C.

2. La fabrication d'un écran revient à 1 000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.
Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.
On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

a) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.

b) Exprimer l'espérance de X en fonction de a.

c) À partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

Exercice 13

Commun à tous les candidats

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1. On appelle :
E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;
E_2 l'évènement « le joueur perd la deuxième partie » ;
E_3 l'évènement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Montrer que la probabilité de l'évènement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'évènement $(X = 3)$ est égale à 0,002.

c) Déterminer la loi de probabilité de X.

d) Calculer l'espérance de X.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'évènement : « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'évènement contraire, et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des évènements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n .

b) En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.
Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

a) Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

b) Démontrer que $p_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \dfrac{1}{4}$.

c) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. Calcul de probabilités.

a) Démontrer que $p(S) = 0,934$.

b) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième,)

3. Étude d'une variable aléatoire B.
Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.
On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

4. Étude d'une nouvelle variable aléatoire. On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.
Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

Exercice 15

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :
- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un évènement E sera noté . La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\mathrm{E})$.

Partie A

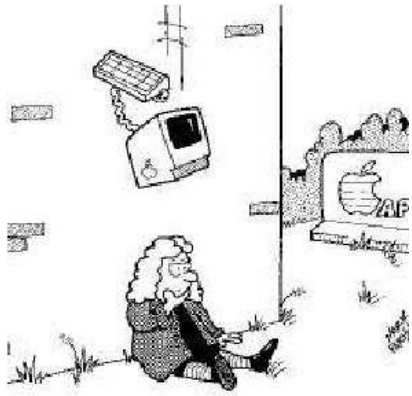
1. Montrer que $p(\mathrm{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?

Partie B
L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :
- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance E(X).
   b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathrm{E(X)} < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

DIX-SEPTIÈME LEÇON

UNE LOI DISCRÈTE : LA LOI BINOMIALE



VI - ÉPREUVE DE BERNOULLI

Pour faire plaisir à votre correcteur de bac, il faudra faire attention à bien reproduire sur vos copies un modèle de rédaction. Alors, garde à vous et suivez le maître.
Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire ne comportant que deux issues contraires : pile ou face, aimer ou ne pas aimer Mireille Mathieu, avoir ou ne pas avoir son bac, être ou ne pas être, etc, un événement ayant une probabilité p et l'autre $1-p$.
Par exemple, une urne contient 5 oursins et 3 balles en mousse. Le tirage d'un objet dans cette urne a deux issues contraires :

- P : « je me pique » avec la probabilité $5/8$
- $\overline{\mathrm{P}}$: « je ne me pique pas » avec la probabilité $3/8$.

Soit alors X la variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}$, prenant la valeur 1 si l'issue de l'épreuve est P et 0 sinon. On appelle alors la loi de probabilité de la variable aléatoire X **loi de Bernoulli de paramètre 5/8**. Le calcul de l'espérance est aisé (vérifier quand même qu'elle vaut $5/8$).

Imaginons maintenant que nous répétions cette expérience n fois, en ayant toujours soin de replacer l'objet tiré dans l'urne. La répétition de ces n épreuves de Bernoulli est appelé un **schéma de Bernoulli**. Les issues élémentaires de ces n tirages sont des « mots » de n lettres, chaque lettre étant un P ou un $\overline{\mathrm{P}}$. On définit alors la variable aléatoire Y à valeurs dans $\{0,1,2,\dots,n\}$, donnant le nombre de tirages « piquants » de ces issues élémentaires. On dit que Y suit **la loi binomiale de paramètres n et 5/8**, notée $\mathscr{B}(n,5/8)$.
On s'intéresse maintenant à l'événement $(\mathrm{Y}=k)$, c'est à dire l'ensemble des mots de n lettres écrits avec k P et $n-k$ $\overline{\mathrm{P}}$. Faîtes un arbre pondéré illustrant la situation (à l'ordi, c'est pénible). Il est aisé de s'apercevoir que la probabilité d'un de ces tirages est $(5/8)^k(3/8)^{n-k}$.
Il reste à déterminer combien il y a de tels mots. Ce sont les anagrammes de $\mathrm{PP}\dots\mathrm{P}\overline{\mathrm{P}}\overline{\mathrm{P}}\dots\overline{\mathrm{P}}$. Vous vous rappelez qu'il y en a $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, c'est à dire $\dbinom{n}{k}$.

La probabilité de l'événement $(\mathrm{Y}=k)$ est donc $\dbinom{n}{k}(5/8)^k(3/8)^{n-k}$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et soit $k\in\{0,1,2,\dots,n\}$. Alors

- $p(\mathrm{X}=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
- on admettra que $\mathbb{E}(\mathrm{X})=np$.

VII - COMMENT FAIRE PLAISIR À SON CORRECTEUR LE JOUR DU BAC

Il ne faut pas oublier de justifier l'utilisation de la loi binomiale.

L'énoncé : chaque crocodile qui traverse la clairière séparant les kékés du fleuve a une probabilité 1/3 de périr écrasé par un éléphant sautant en parachute. Un matin, 32 crocodiles quittent les kékés pour rejoindre le fleuve. On note X, *le nombre de victimes des éléphants parmi ces crocodiles. Les survivants reviennent le soir par le même chemin. On note* Y *le nombre total de victimes. Calculez la probabilité que 22 crocodiles se baignent dans le fleuve et la probabilité que 7 crocodiles retournent sains et saufs le soir dans les kékés. Calculez* $E(Y)$. *Comment interpréter ce résultat ?*

L'expérience qui consiste à traverser la clairière est une épreuve de Bernoulli. On appelle A l'événement « être écrasé par un éléphant ». Alors $p(A) = 1/3$. Les traversées sont indépendantes et ont la même probabilité de finir tragiquement, donc constituent un schéma de Bernoulli. X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(32, 1/3)$.
La probabilité que 22 crocodiles se baignent dans le fleuve vaut donc $p(X = 10)$. Alors

$$p(X=10) = \binom{32}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{22} = \frac{2^{22}\times 32!}{10!22!3^{32}} \approx 0,146$$

Vérifiez que la probabilité pour un crocodile de sortir indemne de l'aller-retour est $(2/3)^2$, et donc que la probabilité d'être écrasé est $1-(2/3)^2$. Comme il y a 32 crocodiles indépendants, Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(32, 5/9)$. Il ne reste plus qu'à calculer $p(Y = 25)$. Enfin, $\mathbb{E}(Y) = 32 \times \dfrac{5}{9} \approx 17,8$. On peut espérer que 14,2 crocodiles survivent aux éléphants parachutistes, soit en moyenne 44% des crocodiles.

VIII - VRAI OU FAUX ?

Dans lequel des cas suivants X est-elle une variable binômiale ? Donnez quand c'est possible $X(\Omega)$, les paramètres de la loi ainsi que l'espérance.

1. Dans une classe on tire au sort et sans remise 5 élèves, X est le nombre d'élèves abonné à Star'Ac mag dans le lot tiré au sort.
2. Dans un sac de 20 billes contenant 7 noires et 13 blanches, on tire avec remise 3 d'entre elles, X étant le nombre de billes noires obtenues.
3. On lance 10 dés, X est le nombre de « 5 » obtenus.
4. Un circuit comprend 32 lampes en série, pour chacune d'elle, la probabilité qu'elle fonctionne est de 3/100, X est le nombre de lampes qui s'allument lorsqu'on appuie sur l'interrupteur. Même exercice avec cette fois des lampes en parallèle.

IX - LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Souvenez-vous : il y a bien longtemps, vous étiez en classe de seconde et vous découvriez les probabilités. Vous lanciez un dé et notiez la fréquence d'obtention de tel ou tel résultat. Déjà fort perspicace, vous aviez remarqué que plus vous lanciez le dé, plus la fréquence d'obtention de 4, par exemple, tendait vers 1/6 qui, vous l'avez appris depuis, est la probabilité d'obtenir 4 en lançant un dé équilibré.
Pour résumer, plus vous répétez une expérience aléatoires dans des conditions identiques et avec indépendance des résultats, plus la *fréquence observée* de succès tend vers la probabilité de succès : c'est ce qu'on appelle la loi faible des grands nombres et nous allons essayer de prouver ce résultat.

a. Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité p et ne prenant que des valeurs positives (rangées comme d'habitude dans l'ordre croissant) $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
Soit ε un nombre[a] strictement positif fixé.
Le monde se sépare en deux catégories : les x_i strictement inférieurs à ε et ceux qui lui sont supérieurs.
Supposons par exemple que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots x_{k-1} < \varepsilon \leqslant x_k \leqslant \cdots \leqslant x_n$

1. Rappelez la définition de l'espérance $\mathbb{E}(X)$.
2. Montrez que $\mathbb{E}(X) \geqslant \varepsilon \sum_{i=k}^{n} p(X = x_i)$.
3. Déduisez-en l'inégalité de Markov $\quad p(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$
4. Déduisez-en cette autre formulation : $p(X < \varepsilon) \geqslant 1 - \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$

a qui sera notre seuil d'erreur fréquence/probabilité

5. Cas particulier de la loi binomiale

On suppose que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Donnez une majoration de $p\left(\frac{X}{n} \geqslant \varepsilon\right)$ et une minoration de $p\left(\frac{X}{n} < \varepsilon\right)$ à l'aide de l'inégalité de Markov.

b. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1. Variance

La variance d'une variable aléatoire est la quantité qui mesure la *dispersion* de X autour de sa moyenne, c'est à dire son espérance. Plus les valeurs sont dispersées, plus sa variance augmente. On attend donc que si X est une variable aléatoire constante, sa variance sera nulle. comme nous l'avons déjà vu à la définition a. page 3. Donnons-en une définition plus synthétique

Variance

La variance de la variable aléatoire X est définie par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big)$$

On aura remarqué que la variance est « homogène » à X^2. On a donc défini $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$ qu'on appelle écart-type de X et qu'on note souvent $\sigma(X)$

2. Appliquez l'inégalité de Markov astucieusement pour obtenir l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$p\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

3. Une application de ces inégalités

Les inégalités de nos amis franco-russes permettent d'avoir une estimation de certaines probabilités sans qu'on connaisse la loi de probabilité. il faut toutefois être conscient que la probabilité exacte peut être assez éloignée de la borne proposée.

Par exemple, le nombre de caleçons molletonnés fabriqués dans une usine syldave en une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.

Estimez, grâce à l'inégalité de Markov, la probabilité que la production de la semaine à venir dépasse 75 caleçons molletonnés.

Estimez, grâce à l'inégalité de Bianaymé-Tchebychev, la probabilité que la production de la semaine à venir soit strictement comprise entre 40 et 60 caleçons molletonnés.

c. Loi faible des grands nombres dans le cas de la loi binomiale

1. Soit λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire quelconque. Montrez que $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda\mathbb{E}(X)$ puis que $\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2\mathbb{V}(X)$.

2. Considérons maintenant le cas où X obéit à la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Intéressons-nous à la probabilité d'obtenir k succès au cours des n répétitions de l'épreuve.

Le rapport k/n est alors le nombre relatif (la fréquence) de succès.

Nous allons essayer de confirmer notre étude expérimentale, à savoir que, plus n est grand, plus le rapport k/n est proche de la probabilité p de succès à chacune des épreuves.

On admettra que la variance de X vérifie $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

Montrez que

$$p\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1$$

Qu'en déduisez-vous ?

X - EXERCICES SYLDAVES

Exercice 16 Opération sur les variables aléatoires

Un Syldave effectue une série infinie de lancers avec une pièce de monnaie mal équilibrée qui amène pile avec la probabilité p.
Soit X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier pile. Calculez $\mathbb{E}(X)$.
Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de fois où face est sorti au moment où pile apparaît pour la première fois. Calculez $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 17 Test de patriotisme syldave

Suite à une étude démographique de la Syldavie, on estime que la probabilité pour qu'un Syldave interrogé au hasard connaisse par cœur les œuvres du GGC (Grand Guide Charismatique) est de p.
On a classé la population en groupes de n Syldaves. On va comparer deux stratégies pour détecter les traitres incultes dans chaque groupe :

- la première consiste à interroger les membres du groupe un par un ;
- on suppose que les services de renseignements syldaves ont mis au point un test rapide permettant de vérifier de manière globale si un groupe contient au moins un traitre. Si ce test global est positif, alors on interroge un a un ses membres pour identifier les traitres, sinon, on passe au groupe suivant.

On note X et Y les variables aléatoires associées au nombre de tests effectués en suivant respectivement la première puis la deuxième stratégie.
Déterminez les lois de X et Y ainsi que leurs espérances.

$\mathbb{E}(X) = n$ et $\mathbb{E}(Y) = n + 1 - n(1-p)^n$

On suppose à présent que $p = 1/_{100}$. Déterminez pour quelles valeurs de n la deuxième méthode est plus économique.

$1 \leqslant n \leqslant 643$

Exercice 18 Manipulation des coefficients binomiaux

Chaque dimanche, pendant n semaines, le Père Thurbais, archevêque de Syldavie, parle de mythes à l'abbesse, pour les novices qui doutent de leur foi. Après la confession de leurs torts, le bon père ne peut plus les quitter. Aussi, les n nonnes qui se sont passées de pain jusqu'aux matines proposent à l'abbé parasite une petite collation dont l'effet est embarrassant. Il a la trouille des cuites, mais elles aiment le goût du blanc et lui offrent un vin bien seyant. La probabilité pour que ce coup de blanc le grise et lui donne la pire nausée est $p_n = 1 - \lambda/n$. On note X_n le nombre de dimanches où ce curé précis passe pour matines sans avoir ce petit ennui ($0 < \lambda < n$). Précisez la loi de probabilité de X_n. Montrez que pour tout entier k compris entre 1 et n on a

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

Exercice 19 Bac syldave : toujours plus d'économies

Le ministre syldave de l'Éducation décide de donner le bac à 80% des enfants dès leur naissance. C'est vrai ! Pourquoi attendre 18 ans et dépenser tant d'argent quand on est même pas sûr du résultat, tout ça pour permettre à des profs d'être payés à être en vacances la moitié de l'année ?

Le ministre découpe donc dans du carton dix carrés numérotés de 1 à 10 et propose au nouveau-né de tirer un carton au hasard.

- si c'est un multiple de cinq, il est recalé,
- si c'est un sept,il obtient la mention « très bien »,
- si c'est un multiple de quatre, il obtient la mention « bien »,
- si c'est un multiple de trois, il obtient la mention « assez bien »
- sinon, il obtient la mention « passable ».

1. Calculez la probabilité pour un nouveau-né syldave d'obtenir le bac avec la mention « passable ».

Le village natal du beau-frère du ministre attend sept naissances pour l'année qui suit. On sait qu'il y aura trois filles et quatre garçons[b]. On note X la variable aléatoire égale au nombre de garçons bacheliers et Y la variable aléatoire égale au nombre de filles bachelières parmi ces bébés.

2. Déterminer les lois de probabilité de X et Y.

3. Calculez la probabilité d'avoir plus de bachelières que de bacheliers.

4. Calculez la probabilité pour que ce village dépasse l'objectif du ministre.

Exercice 20 Le blues du dentiste syldave

Après le lycée, l'université : le ministre syldave a supprimé la faculté de médecine. L'unique dentiste de Gattaca est un ancien boxeur, aveugle et parkinsonien. Il arrache les dents de ses patients au hasard. Les syldaves venant le consulter ont toujours une seule dent de malade parmi les trente-deux qu'ils possèdent encore avant l'intervention des tenailles ou des poings, c'est selon. On considère les dix premiers clients, en notant X le nombre de dents malades extraites à bon escient.

1. Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Calculez la probabilité pour qu'aucun de ces patients n'y laisse la dent malade.

2. Combien doit-il traiter de personnes pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,6 ?

3. Le dernier client est assez obstiné : il se laisse arracher les dents une à une tant que la dent malade n'a pas été extraite. On note Y le nombre de dents saines que ce vaillant patriote voit tomber des mâchoires de la redoutable paire de tenailles.

Calculez la probabilité pour qu'il reparte complètement édenté, puis $\mathbb{E}(Y)$ et $\sigma(Y)$.

XI - DÉSINTÉGRATION RADIOACTIVE : UNE PREMIÈRE APPROCHE PROBABILISTE

Vous avez vu en cours de physique la loi de décroissance radioactive qui décrit l'évolution temporelle du nombre de noyaux radioactifs de l'échantillon

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

dans laquelle N_0 représente le nombre de noyaux radioactifs de l'échantillon à l'instant $t = 0$. J'imagine pourtant qu'en mathématiciens avertis cette loi a dû vous laisser perplexe : comment une fonction censée prendre des valeurs entières peut-elle être solution d'une équation différentielle linéaire et donc s'exprimer à l'aide d'une exponentielle ?!?
Ainsi $N(1/\lambda) = N_0/e \notin \mathbb{N}$!!! Pour vous rassurer, on vous a dit qu'il s'agissait d'un nombre « moyen » de noyaux non désintégrés à l'instant t, mais quel concept se cache derrière cette « moyenne » ? Que se cache-t-il derrière cet ambigu $N(t)$? Le modèle différentiel manquant cruellement de rigueur, appelons **les probabilités à la rescousse !**

a. Hypothèse de travail

Soit une matière fissile contenant N atomes radioactifs . Dans le cas de la radioactivité « naturelle », on peut considérer que les désintégrations des atomes sont indépendantes et que pour un intervalle de temps donné, chaque atome a la même probabilité d'être désintégré. De plus, le phénomène est homogène : il n'y a pas de moments privilégiés où les désintégrations auraient plus de « chances » de se produire. Enfin, la probabilité qu'un noyau se désintègre dans un intervalle de temps $]t, t + \Delta t[$ ne dépend pas de t. On parle alors de *loi de durée de vie sans vieillissement* : un atome ne connaît ni d'adolescence (ouf !) ni de troisième âge. Il est en perpétuel âge mûr puis meurt brusquement.

[b] Comme chacun sait, la capitale syldave s'appelle Gattaca

b. Hypothèse de modèle

Soit Δt un intervalle de temps « très petit » fixé. D'après ce qui précède, on peut MODÉLISER la désintégration radioactive en disant que la probabilité qu'un atome se désintègre dans l'intervalle de temps Δt vaut

$$p(\Delta t) \approx \lambda \Delta t$$

avec λ une constante positive ne dépendant que de la nature du noyau. Ainsi, pour une matière donnée, la probabilité pour le noyau de se désintégrer durant un intervalle de temps Δt ne dépend que de Δt et pas du moment où a été fait la mesure. On suppose qu'un physicien effectue n mesures à intervalle de temps régulier $\Delta t = t/n$, t étant un temps de mesure arbitrairement choisi (la seconde, par exemple).

c. Une modèlisation probabiliste

On[c] lance vers les cieux N pièces truquées de façon que la probabilité d'obtenir FACE en retombant sur le plancher des vaches vaut $p = 1 - \lambda t$: on détruit toutes les pièces donnant PILE et on recommence avec les restantes jusqu'à avoir effectué n lancers ou éliminé toutes les pièces. Comme vous l'avez deviné, N représente le nombre de noyaux non encore désintégrés et n le nombre d'intervalles de temps (de milliardièmes de secondes ou ce que vous voulez) que dure l'observation.

1. Lorsque $n = 1$, tout va bien : montrez que la probabilité pour qu'il reste k pièces (ou noyaux) après 1 intervalle de temps vaut

$$\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

2. Pour les observations suivantes, les choses se compliquent car on ne connaît plus le nombre de pièces (noyaux) survivantes : le nombre $N(\Delta t)$ de pièces restantes après n lancers varie avec chaque expérience. On pense naturellement (!) à introduire une *variable aléatoire* qu'on notera X_n et qui prend pour valeurs les différents $N(t)$ déterminés par chacune des expériences possibles.

d. Une pause s'impose !

X_n est une fonction et s'appelle variable aléatoire. La notation $N(t)$ laisse penser que N est une fonction (au sens mathématique du terme) et pourtant c'est une valeur prise par la fonction X_n.
À part ça, d'un point de vue physique, il faut comprendre que le phénomène de désintégration est *aléatoire* : on ne peut pas savoir a priori combien exactement de noyaux seront désintégrés entre deux observations, mais on va va tenter de déterminer le nombre $moyen$(?) de désintégrations.

e. Une désintégration binomiale

Intéressons-nous à une pièce (un noyau) : quelle est la probabilité pour qu'elle soit encore présente au n-ième lancer ? Compte tenu de l'indépendance des lancers (désintégrations), que pouvez-vous en déduire pour la variable aléatoire X_n ?
Montrez que l'espérance mathématique $E(X_n)$ vaut $N(1 - \lambda t/n)^n$.
Maintenant, vous vous souvenez du résultat classiqueexp$(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ et donc ici

$$\lim_{n\to+\infty} N(1 - \lambda t/n)^n = Ne^{-\lambda t}$$

Miracle ! Le lien est fait. Nous savons maintenant *en toute rigueur* ce que représente $N(1 - \lambda t/n)^n$ (et par suite sa limite quand n tend vers l'infini en extrapolant un peu) : c'est l'espérance de la variable aléatoire X_n définie comme prenant pour valeurs les nombres $N(t) = N(n\Delta t)$ issus des diverses expériences possibles. Nous verrons plus tard un moyen spécifique de faire le lien avec le phénomène continu.

f. Les maths au secours du sens physique

Une fois n'est pas coutume, les mathématiques enrichissent notre sens physique. Nous allons un peu déborder des programmes de mathématiques et de physique pour exploiter au maximum le résultat que nous venons d'obtenir.

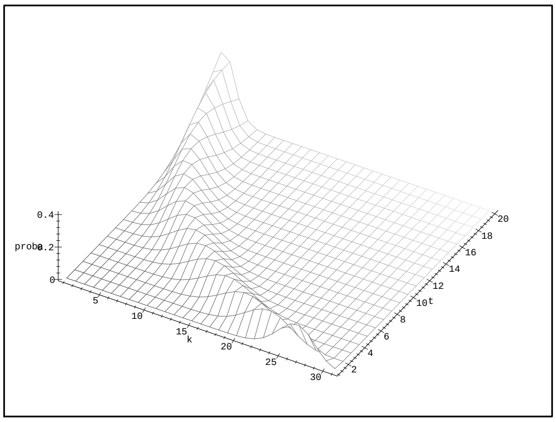
Tout d'abord, nous pouvons calculer la valeur moyenne de X_n mais nous sommes maintenant capables de calculer la probabilité de l'événement $X_n = k$

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{N}{k} p^{nk} (1-p)^{N-k}$$

[c] Il est utile de rappeler que ON est un pronom *indéfini*...

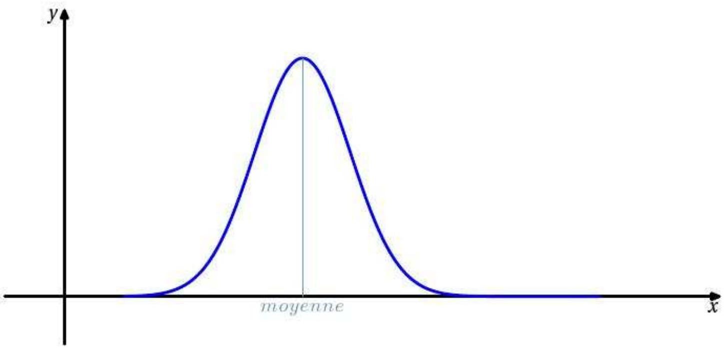
On pourra même répondre à des questions du genre : quelle est la probabilité qu'une expérience donne un $N(t)$ supérieur à sa moyenne théorique $Ne^{-\lambda t}$ (dont $N(1-\lambda t/n)^n$ est une bonne approximation).

Le petit dessin suivant nous permet même de comprendre une propriété très importante :



Cette espèce de courbe en cloche tordue peut vous aider à visualiser que l'espérance correspond à peu de choses près aux valeurs suivant la ligne de crête et donc que la moyenne correspond à **la valeur la plus probable**, ce qui rassure d'autant plus le physicien.

Ceci n'a rien d'évident a priori : il existe des lois de probabilités où la variable aléatoire n'a aucune chance de prendre pour valeur l'espérance mathématique[d]. Pourtant, ça nous paraît normal car c'est le cas de figure des *distributions normales* qu'on représente à l'aide de la fameuse « cloche » de Gauss



que vous étudierez sûrement un jour. Or, il se trouve que la Loi Binomiale tend vers la Loi Normale sous certaines conditions. La boucle est bouclée.

Toujours plus fort : on peut prouver que le pourcentage de noyaux survivants $N(t)/N$ définit une variable aléatoire X/N qui suit approximativement une loi normale d'espérance m et d'écart-type $\sqrt{\dfrac{m(1-m)}{N}}$: ce dernier résultat indique que plus le nombre initial de noyaux est grand, plus les fluctuations relatives des désintégrations pourront être contrôlées.

Bref, vous découvrez une utilisation des probabilités sûrement insolite pour vous : loin d'être une discipline vaseuse pour turfiste, elles sont en fait un pilier de la science moderne.

XII - BAC

Exercice 21 QCM

Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions A, B ou C est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

d Donnez un exemple d'une telle loi...

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point . (Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*
Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a) La probabilité de tirer 3 boules noires est :
A $\frac{1}{56}$ B $\frac{1}{120}$ C $\frac{1}{3}$

b) La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :
A. $\frac{11}{56}$ B. $\frac{11}{120}$ C. $\frac{16}{24}$

2. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

a) La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :
A. $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3$ B. $\left(\frac{3}{8}\right)^5$ C. $\left(\frac{1}{5}\right)^5$

b) La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :
A. $\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$ B. $2 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{3}{8}$ C. $10 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$

3. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :
- R_1 l'évènement : « La première boule tirée est rouge » ;
- N_1 l'évènement : « La première boule tirée est noire » ;
- R_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;
- N_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est noire ».

a) La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est :
A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{5}{14}$

b) La probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_2$ est :
A. $\frac{16}{49}$ B. $\frac{15}{64}$ C. $\frac{15}{56}$

c) La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :
A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{3}{28}$

d) La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :
A. $\frac{15}{56}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{7}$

Exercice 22 Encore un exercice de bac sans intérêt...

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante :
le joueur lance le dé,
• s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
• s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
• si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.
On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :
A : « Le dé amène le numéro 1. »
B : « Le dé amène un multiple de trois. »
C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3. »
N : « La boule tirée est noire. »

1. Le joueur joue une partie.

a) Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

b) Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

d) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$.
Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.
Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 23 Probabilité et polynômes

Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tir ages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrêtera à l'obtention d'une boule b lanche.

1. Dans cette question, on ira au maximum à 4 tirages. On appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche. Par convention, X sera égal à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les 4 tirages.

a) Calculer la probabilité pour que X soit égal à 0.

b) Calculer la probabilité pour que X soit égal à k, k valant successivement 1, 2, 3 et 4.

2. Dans cette question, on procédera à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul. De même on appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtentio n de la première boule blanche et ici encore X sera nul si l'on n'obtient pas de boule blanche ap rès n tirages.

a) Calculer la probabilité pour que X soit égal à k, k étant un entier naturel variant de 1 à n.

b) On considère le polynôme P tel que $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.
Soit E(X) l'espérance de la variable aléatoire X. Montrer que $E(X) = \frac{3}{5}P\left(\frac{2}{5}\right)$.

c) On rappelle que pour tout réel x différent de 1, on a $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
En dérivant les deux termes de l'égalité précédente, déterminer une autre expression de $P(x)$ et e n déduire que $E(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Exercice 24

Pour les questions 1 *et* 2*, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à* 10^{-3} *près.*
Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les évènements suivants :
C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,
C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,
R : « L'enfant prend une bille rouge »,
V : « L'enfant prend une bille verte ».

a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
b) Calculer la probabilité de l'évènement R.
c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

Exercice 25

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.
Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.
Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.
Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.
Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Dans cette on suppose que $p = \dfrac{1}{20}$.

a) Calculer l'espérance mathématique de X.
b) Calculer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
c) Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \dfrac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.

a) Démontrer que $P(X \leqslant 2) = (1-p)^{38}\left(741p^2 + 38p + 1\right)$.
b) Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = (1-x)^{38}\left(741x^2 + 38x + 1\right)$. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $f(x_0) = 0,01$. Déterminer l'entier naturel n tel que $\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$.
c) En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %.
(On exprimera p en fonction de x_0).

Exercice 26

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.
Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 50$.
Dn définit les évènements suivants :

- A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
- B : « le jardinier a choisi le lot 2 »
- J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a) Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b) Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c) Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes,

d) Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles

a) Montrer que : $P_B(J_n) = \binom{50}{n}2^{-50}$.

b) En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c) On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. Établir que :

$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}.$$

d) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0,9$?
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Exercice 27

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante. On considère les évènements :
A : « au moins une personne accepte de répondre »
B : « moins de trois personnes acceptent de répondre »
C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».
Calculer les probabilités des évènements A, B et C. On arrondira au millième.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\begin{cases} \text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ P(X=k) = \dfrac{e^{-a}a^k}{k!} \\ \text{et } P(X=n) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{e^{-a}a^k}{k!}, \\ \text{formules dans lesquelles } a = \dfrac{n}{10} \end{cases}$$

a) Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

b) Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = 1 - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$, et que cette solution est comprise entre $6,29$ et $6,3$.

c) En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.

Exercice 28

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A - Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.
Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i-ème jour » et O_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ème jour ».

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

2. Déterminer les probabilités suivantes : $p(\mathrm{E}_1)$; $p_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{O}_2)$; $p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2)$.

3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B - On suppose maintenant que n touristes ($n \geqslant 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leqslant k \leqslant n$) partent en direction de l'Est.

2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.

a) Peut-il y avoir deux touristes heureux ?

b) Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste *heureux* parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

c) **Application numérique :**
Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

Références

FRUGIER, Gérard ; Ellipses (éd.): Petits problèmes quotidiens de probabilités. 2002

WARUSFEL, André: La radioactivité. Revue de Mathématiques Spéciales 1-114ème année