Exercice spécialité **CORRIGÉ**

1. Soit φ l'application complexe associée à f. Alors $\varphi(z)$ est de la forme

$$\varphi(z) = az + b, \quad a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C}$$

f est donc une similitude de rapport $|a|$ et d'angle $\text{Arg}(a)$.(0,25 pt)

$|a| = \sqrt{3+1} = 2$ et $a = |a|\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}\right) = |a|\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$

Donc *f est de rapport 2 et une mesure de son angle est* $-\dfrac{5\pi}{6}$ (0,25 pt)+(0,25 pt)

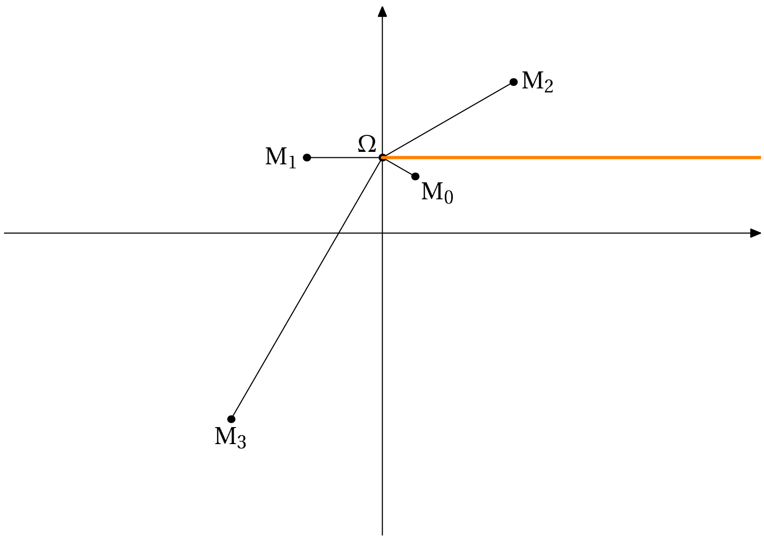
On cherche à présent d'éventuels invariants en résolvant l'équation $\varphi(z) = z$. On obtient comme unique solution i : *f est donc de centre* $\Omega(\text{i})$ (0,25 pt)

2. De $z_{\overrightarrow{\Omega M_0}} = z_o - \text{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}\text{i} = \dfrac{1}{2}\left(\text{e}^{-\text{i}\pi/6}\right)$, on déduit que

$$\Omega M_0 = 1/2 \qquad \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right) = -\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

(0,5 pt)

3. a) On admire le travail :(0,5 pt)



b) Soit n un entier naturel et $\mathscr{P}(n)$ la propriété :« $z_n - \text{i} = 2^n\text{e}^{\text{i}7n\pi/6}(z_0 - \text{i})$ »

- ▷ $2^0\text{e}^{\text{i}7\times 0\pi/6}(z_0 - \text{i}) = z_0 - \text{i}$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ▷ On peut donc supposer qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} z_{k+1} - \text{i} &= \varphi(z_k) - \text{i} \\ &= 2\text{e}^{-5\text{i}\pi/6}(z_k - \text{i}) \\ &= 2\text{e}^{-5\text{i}\pi/6} \times 2^k\text{e}^{7k\text{i}\pi/6}(z_0 - \text{i}) \\ &= 2^{k+1}\text{e}^{7k+7-12\text{i}\pi/6} \\ &= 2^{k+1}\text{e}^{7(k+1)\text{i}\pi/6} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k)$ vraie $\Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)$ vraie

- ▷ Nous avons donc prouvé par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ était vraie pour tout entier naturel n.(1 pt)

Or on a montré précédemment que $z_0 - z_\Omega = z_0 - \text{i} = \dfrac{1}{2}\text{e}^{-\text{i}\pi/6}$, donc(0,5 pt)

$$z_n - \text{i} = 2^{n-1}\text{e}^{(7n-1)\text{i}\pi/6}$$

c) On en déduit que $\Omega M_n = |z_n - \text{i}| = 2^{n-1}$.

On cherche le plus petit entier n tel que $2^{n-1} \geqslant 10^2$. Or $2^6 = 64 < 10^2 < 2^7 = 128$. L'entier cherché est donc 7.(0,5 pt)

a) $7 \times (-5) - 12 \times (-3) = -35 + 36 = 1$, donc le couple $(-5\,;3)$ est solution de (E). (0,5 pt) La résolution habituelle (cf cours) donne

$$\mathscr{S} = \{(-5+12k, -3+7k), k \in \mathbb{Z}\}$$

b) Comme son nom l'indique, Δ est l demi-droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par Ω.
On cherche les entiers n tels que le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{u}$, c'est à dire tel que $\operatorname{Arg}(z_{\overrightarrow{\Omega M_n}}) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Or $z_{\overrightarrow{\Omega M_n}} = z_n - 1 = 2^{n-1}\mathrm{e}^{(7n-1)\mathrm{i}\pi/6}$.
Les entiers cherchés sont donc les solutions de $\dfrac{(7n-1)\pi}{6} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i.e. les solutions de (E). L'ensemble cherché est donc $\mathscr{S} \cap \mathbb{N}$. Son plus petit élément est $-5+12=7$.(0,5 pt)