Probabilités III

Lois continues

Guillaume CONNAN

Lycée Notre-Dame - T^{ale}S3

3 mai 2019

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0,1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0;1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

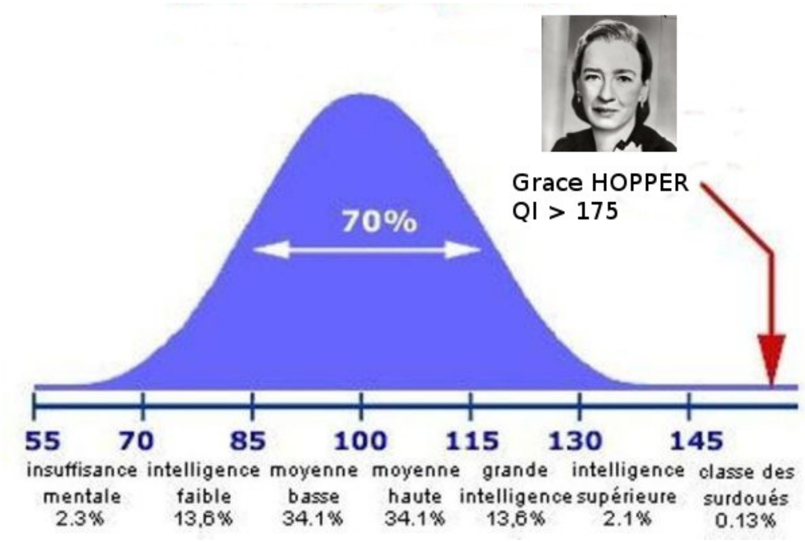
Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices


Grace HOPPER
QI > 175
70%
55
70
85
100
115
130
145
insuffisance mentale 2.3%
intelligence faible 13,6%
moyenne basse 34.1%
moyenne haute 34.1%
grande intelligence 13,6%
intelligence supérieure 2.1%
classe des surdoués 0.13%

- Nous avons étudié pour l'instant uniquement des variables aléatoires pouvant prendre des valeurs isolées, surtout des nombres entiers.

- Nous avons étudié pour l'instant uniquement des variables aléatoires pouvant prendre des valeurs isolées, surtout des nombres entiers.
- Cependant, on est souvent amené dans les domaines industriels et économiques à étudier des variables aléatoires pouvant prendre, au moins théoriquement, n'importe quelle valeur dans R ou dans un intervalle de R

- les dimensions d'un objet ;

- les dimensions d'un objet ;
- la durée de vie d'un matériel ;

- les dimensions d'un objet ;
- la durée de vie d'un matériel ;
- une distance parcourue ;

- les dimensions d'un objet ;
- la durée de vie d'un matériel ;
- une distance parcourue ;
- une quantité de matière ou une masse.

- les dimensions d'un objet ;
- la durée de vie d'un matériel ;
- une distance parcourue ;
- une quantité de matière ou une masse.

- les dimensions d'un objet ;
- la durée de vie d'un matériel ;
- une distance parcourue ;
- une quantité de matière ou une masse.

Les évènements que l'on étudie sont définis par des inéquations et non des équations.

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0,1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0;1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

- Calculons la probabilité qu'un nombre quelconque du segment $[0, 1]$ se trouve dans un certain intervalle $[a, b]$ inclus dans $[0, 1]$;

- Calculons la probabilité qu'un nombre quelconque du segment $[0,1]$ se trouve dans un certain intervalle $[a,b]$ inclus dans $[0,1]$;
- on peut subdiviser le segment $[0,1]$ en 100 petits segments de même longueur Δx (1mm par exemple) ;

- Calculons la probabilité qu'un nombre quelconque du segment $[0, 1]$ se trouve dans un certain intervalle $[a, b]$ inclus dans $[0, 1]$;
- on peut subdiviser le segment $[0, 1]$ en 100 petits segments de même longueur Δx (1mm par exemple) ;
- La probabilité qu'un nombre se trouve dans l'une des subdivisions vaut donc 1/100 compte-tenu de l'uniformité de la répartition.

- Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a, b]$ et $\lambda([a, b])$ la longueur du segment $[a, b]$;

- Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a, b]$ et $\lambda([a, b])$ la longueur du segment $[a, b]$;
- Notons $P([a, b])$ la probabilité que le nombre se trouve dans le segment $[a, b]$;

- Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a, b]$ et $\lambda([a, b])$ la longueur du segment $[a, b]$;
- Notons $P([a, b])$ la probabilité que le nombre se trouve dans le segment $[a, b]$;
- Alors $P([a, b]) = \dfrac{n_{a,b} \times \Delta x}{100 \times \Delta x}$

- Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a, b]$ et $\lambda([a, b])$ la longueur du segment $[a, b]$;
- Notons $P([a, b])$ la probabilité que le nombre se trouve dans le segment $[a, b]$;
- Alors $P([a, b]) = \dfrac{n_{a,b} \times \Delta x}{100 \times \Delta x}$

- Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a,b]$ et $\lambda([a,b])$ la longueur du segment $[a,b]$;
- Notons $P([a,b])$ la probabilité que le nombre se trouve dans le segment $[a,b]$;
- Alors $P([a,b]) = \dfrac{n_{a,b} \times \Delta x}{100 \times \Delta x} = \dfrac{n_{a,b}}{100}$;
- . On s'aperçoit que $P([a,b])$ est indépendante de l'unité Δx choisie par proportionnalité ;

- Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a, b]$ et $\lambda([a, b])$ la longueur du segment $[a, b]$;
- Notons $P([a, b])$ la probabilité que le nombre se trouve dans le segment $[a, b]$;
- Alors $P([a, b]) = \dfrac{n_{a,b} \times \Delta x}{100 \times \Delta x} = \dfrac{n_{a,b}}{100}$;
- . On s'aperçoit que $P([a, b])$ est indépendante de l'unité Δx choisie par proportionnalité ;
- donc
$$P([a, b]) = \frac{\lambda([a, b])}{\lambda([0, 1])}$$

- On peut ainsi faire tendre Δx vers 0 pour obtenir un modèle continu ;

- On peut ainsi faire tendre Δx vers 0 pour obtenir un modèle continu ;
- on se rappelle que $\lambda([a, b]) = \int_a^b 1\, dx$

- On peut ainsi faire tendre Δx vers 0 pour obtenir un modèle continu ;
- on se rappelle que $\lambda([a,b]) = \int_a^b 1\,dx$
- Finalement
$$P([a,b]) = \frac{\int_a^b 1\,dx}{\int_0^1 1\,dx}$$

- On peut ainsi faire tendre Δx vers 0 pour obtenir un modèle continu ;
- on se rappelle que $\lambda([a, b]) = \int_a^b 1\, dx$
- Finalement

$$P([a, b]) = \frac{\int_a^b 1\, dx}{\int_0^1 1\, dx}$$

- On peut ainsi faire tendre Δx vers 0 pour obtenir un modèle continu ;
- on se rappelle que $\lambda([a, b]) = \int_a^b 1\, dx$
- Finalement

$$P([a, b]) = \frac{\int_a^b 1\, dx}{\int_0^1 1\, dx} = \frac{b-a}{1-0}$$

- Cette loi de probabilité sur $[0, 1]$, qu'on appelllera **loi uniforme** sur $[0, 1]$, est associée à une fonction constante (dans le cas présent la fonction constante et égale à 1) qui caractérise la probabilité ;

- Cette loi de probabilité sur $[0, 1]$, qu'on appelllera **loi uniforme** sur $[0, 1]$, est associée à une fonction constante (dans le cas présent la fonction constante et égale à 1) qui caractérise la probabilité ;
- on l'appelle la **densité** de P ;

- Cette loi de probabilité sur $[0, 1]$, qu'on appelllera **loi uniforme** sur $[0, 1]$, est associée à une fonction constante (dans le cas présent la fonction constante et égale à 1) qui caractérise la probabilité ;
- on l'appelle la **densité** de P ;
- On notera alors

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \frac{\int_a^b 1\,dx}{\int_0^1 1\,dx}$$

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

- Comme on travaille sur des intervalles, la fonction de répartition de la variable aléatoire étudiée sera alors essentielle. Traditionnellement notée F, elle est justement définie par

$$F(a) = P(X \leq a)$$

pour a dans l'intervalle de définition de X.

Définition (Fonction de répartition)

Soit une loi de probabilité p sur $I = [a, b]$ et de densité f.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I suivant la loi de probabilité P.
On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction F définie sur I par

$$F(x) = P(a \leqslant X \leqslant x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Exemple

Exemple

- $P(X \leq 0) = F(0)$;

Exemple

- $P(X \leq 0) = F(0)$;
- $P(-5,7 < X \leq 15,9) = F(15,9) - F(-5,7)$;

Exemple

- $P(X \leq 0) = F(0)$;
- $P(-5,7 < X \leq 15,9) = F(15,9) - F(-5,7)$;
- $P(X \geq 20,54) = 1 - F(20,54)$.

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0,1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0;1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Exemple

Exemple

- La fonction de répartition est souvent donnée par une intégrale.

Exemple

- La fonction de répartition est souvent donnée par une intégrale.
- Étudions par exemple la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est

$$\begin{cases} \forall x < 0 \quad F(x) = 0\,; \\ \forall x \geq 0 \quad F(x) = \displaystyle\int_0^x 0,002e^{-0,002t}\,dt. \end{cases}$$

Exemple

- La fonction de répartition est souvent donnée par une intégrale.
- Étudions par exemple la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est

$$\begin{cases} \forall x < 0 \quad F(x) = 0\,; \\ \forall x \geq 0 \quad F(x) = \displaystyle\int_0^x 0,002e^{-0,002t}\,dt. \end{cases}$$

- La fonction intervenant dans cette intégrale, notée f, est appelée **densité de probabilité** de la variable X.

Exemple

- La fonction de répartition est souvent donnée par une intégrale.
- Étudions par exemple la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est

$$\begin{cases} \forall x < 0 \quad F(x) = 0\,; \\ \forall x \geq 0 \quad F(x) = \displaystyle\int_0^x 0,002e^{-0,002t}dt. \end{cases}$$

- La fonction intervenant dans cette intégrale, notée f, est appelée **densité de probabilité** de la variable X.
- La fonction de répartition F est en fait une primitive de f.

Théorème

Si a et b sont deux réels de l'ensemble de définition de X, alors

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Remarque

Remarque

- La probabilité de l'univers, c'est à dire de R ou de l'intervalle de R étudié est forcément égale à 1.

Remarque

- La probabilité de l'univers, c'est à dire de R ou de l'intervalle de R étudié est forcément égale à 1.
- Ainsi, pour une variable aléatoire définie sur R, sa densité de probabilité doit vérifier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

Remarque

- La probabilité de l'univers, c'est à dire de R ou de l'intervalle de R étudié est forcément égale à 1.
- Ainsi, pour une variable aléatoire définie sur R, sa densité de probabilité doit vérifier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

- On peut vérifier cette propriété en étudiant séparément $\int_0^x f(t)dt$ et $\int_x^0 f(t)dt$ puis leurs limites respectives quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Théorème

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X définie par une densité de probabilité est donnée par la formule

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

- Pour calculer la variance, on utilisera la plupart du temps le théorème de König-Huyghens :

- Pour calculer la variance, on utilisera la plupart du temps le théorème de König-Huyghens :
- la variance est égal àl'espérance du carré moins le carré de l'espérance.

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Définition

La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$ signifie que sa fonction de répartition est

$$\begin{cases} \forall x < 0 \quad F(x) = 0\,; \\ \forall x \geq 0 \quad F(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt. \end{cases}$$

Définition

La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$ signifie que sa fonction de répartition est

$$\begin{cases} \forall x < 0 \quad F(x) = 0\,; \\ \forall x \geq 0 \quad F(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt. \end{cases}$$

- Est-ce que l'on définit bien une loi de probabilité ?

Définition

La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$ signifie que sa fonction de répartition est

$$\begin{cases} \forall x < 0 \quad F(x) = 0\,; \\ \forall x \geq 0 \quad F(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt. \end{cases}$$

- Est-ce que l'on définit bien une loi de probabilité ?
- Que vaut $F(x)$ sans utiliser d'intégrale ?

- Espérance ?

- Espérance ?
- Loi de durée de vie sans vieillissement ?

Exemple (Bac)

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Exemple (Bac)

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.

Exemple (Bac)

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.
2. Calculer $P(Z > 2)$.

Exemple (Bac)

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.
2. Calculer $P(Z > 2)$.
3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

Exemple (Bac)

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Voici les observations sur une journée

Durée d'attente en minute	$[0\,;\,2[$	$[2\,;\,4[$	$[4\,;\,6[$	$[6\,;\,8[$
Nombre de voitures	75	19	10	5

Exemple (Bac)

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Voici les observations sur une journée

Durée d'attente en minute	$[0\,;\,2[$	$[2\,;\,4[$	$[4\,;\,6[$	$[6\,;\,8[$
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.

Exemple (Bac)

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Voici les observations sur une journée

Durée d'attente en minute	$[0\,;\,2[$	$[2\,;\,4[$	$[4\,;\,6[$	$[6\,;\,8[$
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.
2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (minute).

Exemple (Bac)

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Voici les observations sur une journée

Durée d'attente en minute	$[0\,;\,2[$	$[2\,;\,4[$	$[4\,;\,6[$	$[6\,;\,8[$
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.
2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (minute).
   2.1 Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$ min.

Exemple (Bac)

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Voici les observations sur une journée

Durée d'attente en minute	$[0\,;\,2[$	$[2\,;\,4[$	$[4\,;\,6[$	$[6\,;\,8[$
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.
2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (minute).
   2.1 Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$ min.
   2.2 Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?

Exemple (Bac)

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Voici les observations sur une journée

Durée d'attente en minute	$[0\,;\,2[$	$[2\,;\,4[$	$[4\,;\,6[$	$[6\,;\,8[$
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.
2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (minute).
   2.1 Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$ min.
   2.2 Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?
   2.3 Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
Notion de continuité
Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme
Fonction de répartition
Densité de probabilité
Espérance et variance
Lois exponentielles
Lois normales
Histoire
Généralités
Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
Utilisation de la loi normale centrée réduite
Largeur de la cloche
Approximation d'une loi binomiale par une loi normale
Exercices

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

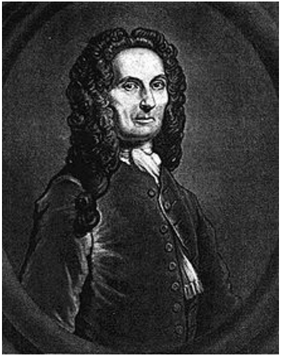
Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

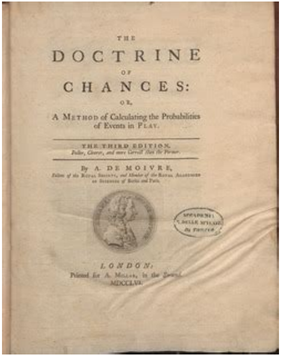
Exercices

- Idée de la « normalité »

- Idée de la « normalité »
- beaucoup de données autour de la moyenne

- Idée de la « normalité »
- beaucoup de données autour de la moyenne
- le nombre de données diminue à mesure qu'on s'en éloigne




THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A METHOD of Calculating the Probabilities of Events in PLAY.

THE THIRD EDITION.

By A. DE MOIVRE,

LONDON:
Printed for A. MILLAR, in the Strand.
MDCCLVI.

$$f(x) = ae^{-bx^2}$$

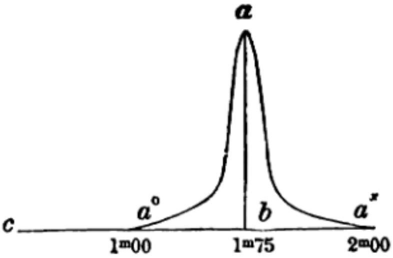
Pierre-Simon LAPLACE (1749-1827)

Friedrich GAUSS (1777-1855)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Adolphe QUETELET (1796-1874)

En ayant égard au tableau numérique précédent, la courbe qui représente 1000 hommes inscrits est la suivante ; nous nous bornerons à donner la figure des nombres *calculés*, qui se confondrait sensiblement avec celle des nombres *observés*.



Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $N(m;\sigma)$ de paramètres m et σ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie par

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}.$$

Théorème

On admet que si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $N(m;\sigma)$ alors

$$E(X) = m \text{ et } \sigma(X) = \sigma.$$

Ainsi les paramètres d'une loi normale sont en fait son espérance mathématique et son écart-type.

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0,1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0;1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Définition

La loi normale la plus simple est celle de moyenne $m = 0$ et d'écart-type $\sigma = 1$. On l'appelle **loi normale centrée réduite.**
Sa fonction de répartition est souvent noté Π

- Extrait de La Table

t	0,05	0,06	0,07
1,1	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9115	0,9131	0,9147

- Extrait de La Table

t	0,05	0,06	0,07
1,1	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9115	0,9131	0,9147

- Le nombre situé à l'intersection de la colonne 0,06 et de la ligne 1,3 est la valeur de la fonction de répartition de X pour $t = 1,3 + 0,06 = 1,36$. Ainsi

$$\Pi(1,36) = P(X \leq 1,36) = 0,9131.$$

CASIO

- $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F5}}$ (STAT) $\boxed{\text{F3}}$ (DIST) $\boxed{\text{F1}}$ (NORM)

CASIO

- $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F5}}$ (STAT) $\boxed{\text{F3}}$ (DIST) $\boxed{\text{F1}}$ (NORM)
- $\boxed{\text{Ncd}}$

CASIO

- $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F5}}$ (STAT) $\boxed{\text{F3}}$ (DIST) $\boxed{\text{F1}}$ (NORM)
- $\boxed{\text{Ncd}}$
- Valeur inférieure, valeur supérieure, écart-type, moyenne

CASIO

- OPTN F5 (STAT) F3 (DIST) F1 (NORM)
- Ncd
- Valeur inférieure, valeur supérieure, écart-type, moyenne
- -10^{99} , 1.36 , 1 , 0 EXE

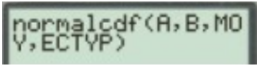
CASIO

- $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F5}}$ (STAT) $\boxed{\text{F3}}$ (DIST) $\boxed{\text{F1}}$ (NORM)
- $\boxed{\text{Ncd}}$
- Valeur inférieure, valeur supérieure, écart-type, moyenne
- $\boxed{-10^{99}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{1.36}$ $\boxed{,}$ $\boxed{1}$ $\boxed{,}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{EXE}}$
- 0.9130850381

TI


QUIT
INS
2nd
MODE
DEL
A-LOCK
LINK
LIST
ALPHA
X,T,θ,n
STAT
TEST
ANGLE
DRAW
DISTR
MATH
APPS
PRGM
VARS


DISTR DRAW
1:normalpdf(
2:normalcdf(
3:invNorm(
4:tpdf(
5:tcdf(
6:χ²pdf(
7↓χ²cdf(


normalcdf(A,B,MO
Y,ECTYP)

Théorème

Parité de la loi centrée réduite Comme la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite est une fonction paire, on a :

$$\begin{aligned}\Pi(-t) &= P(X < -t)\\ &= P(X > t)\\ &= 1 - P(X < t)\\ &= 1 - \Pi(t).\end{aligned}$$

Théorème

Parité de la loi centrée réduite Comme la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite est une fonction paire, on a :

$$\begin{aligned}\Pi(-t) &= P(X < -t)\\ &= P(X > t)\\ &= 1 - P(X < t)\\ &= 1 - \Pi(t).\end{aligned}$$

Théorème

Parité de la loi centrée réduite Comme la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite est une fonction paire, on a :

$$\begin{aligned}\Pi(-t) &= P(X<-t)\\ &= P(X>t)\\ &= 1-P(X<t)\\ &= 1-\Pi(t).\end{aligned}$$

Théorème

On déduit de la proposition précédente que

$$\begin{aligned}P(-t<X<t) &= P(X<t)-P(X<-t)\\ &= \Pi(t)-\Pi(-t)\\ &= \Pi(t)-(1-\Pi(t))\\ &= 2\Pi(t)-1\end{aligned}$$

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0,1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0;1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Théorème

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $N(m;\sigma)$ de moyenne m et d'écart-type σ alors la variable aléatoire

$$Y = \frac{X-m}{\sigma}$$

suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

- On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

- On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;
- Y suit la loi normale centrée réduite ;

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

- On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;
- Y suit la loi normale centrée réduite ;
- L'événement $X < 16$ est alors équivalent à $Y < \dfrac{16-12}{3} = \dfrac{4}{3}$;

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

- On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;
- Y suit la loi normale centrée réduite ;
- L'événement $X < 16$ est alors équivalent à $Y < \dfrac{16-12}{3} = \dfrac{4}{3}$;
- donc $P(X < 3) = P(Y < 1,33) = \Pi(1,33) = 0,908\,2$;

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

- On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;
- Y suit la loi normale centrée réduite ;
- L'événement $X < 16$ est alors équivalent à $Y < \dfrac{16-12}{3} = \dfrac{4}{3}$;
- donc $P(X < 3) = P(Y < 1,33) = \Pi(1,33) = 0,908\,2$;
- L'événement $9 < X < 15$ est alors équivalent à $-1 < Y < 1$;

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

- On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;
- Y suit la loi normale centrée réduite ;
- L'événement $X < 16$ est alors équivalent à $Y < \dfrac{16-12}{3} = \dfrac{4}{3}$;
- donc $P(X < 3) = P(Y < 1,33) = \Pi(1,33) = 0,908\,2$;
- L'événement $9 < X < 15$ est alors équivalent à $-1 < Y < 1$;
- donc

$$
\begin{aligned}
P(9 < X < 15) &= P(-1 < Y < 1) \\
&= \Pi(1) - \Pi(-1) \\
&= \Pi(1) - (1 - \Pi(1)) \\
&= 2\Pi(1) - 1 = 0,682\,6.
\end{aligned}
$$

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
Notion de continuité
Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme
Fonction de répartition
Densité de probabilité
Espérance et variance
Lois exponentielles
Lois normales
Histoire
Généralités
Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
Utilisation de la loi normale centrée réduite
Largeur de la cloche
Approximation d'une loi binomiale par une loi normale
Exercices

Théorème

Si X suit la loi normale de paramètres m et σ, alors

Théorème

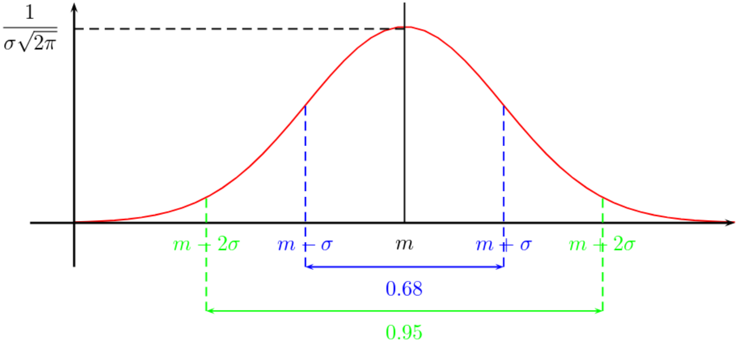
Si X suit la loi normale de paramètres m et σ, alors

- $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \approx 0,68.$

Théorème

Si X suit la loi normale de paramètres m et σ, alors

- $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \approx 0,68$.
- $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \approx 0,95$.


$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
$m - 2\sigma$
$m - \sigma$
m
$m + \sigma$
$m + 2\sigma$
0.68
0.95

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Théorème

Si n est « grand » et p est assez éloigné de 0 et 1 alors la loi binomiale $B(n;p)$ peut être approchée par la loi normale $N(m;\sigma)$, où $m = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue
- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0,1]$ - Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois exponentielles

Lois normales
- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0;1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π.

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π.

1. $P(X \leq 1,27)$;

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π.

1. $P(X \leq 1,27)$;
2. $P(X \geq 0,84)$;

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π.

1. $P(X \leq 1,27)$;
2. $P(X \geq 0,84)$;
3. $P(X \leq -1,58)$;

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π.

1. $P(X \leq 1,27)$;
2. $P(X \geq 0,84)$;
3. $P(X \leq -1,58)$;
4. $P(0,25 \leq X \leq 1,25)$;

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π.

1. $P(X \leq 1,27)$;
2. $P(X \geq 0,84)$;
3. $P(X \leq -1,58)$;
4. $P(0,25 \leq X \leq 1,25)$;
5. $P(-0,93 \leq X \leq 0,93)$.

Exemple

Exprimer $P(t_1 \leq X \leq t_2)$, $P(X \leq -t)$ et $P(-t \leq X \leq t)$ à l'aide de la fonction Π.

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20; 5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20; 5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

1. $P(X \leq 28)$;

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20; 5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

1. $P(X \leq 28)$;
2. $P(X \geq 28)$;

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20; 5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

1. $P(X \leq 28)$;
2. $P(X \geq 28)$;
3. $P(X \geq 20)$;

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20;5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

1. $P(X \leq 28)$;
2. $P(X \geq 28)$;
3. $P(X \geq 20)$;
4. $P(X \geq 12)$;

Notre Dame LYCÉES Rezé

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20; 5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

1. $P(X \leq 28)$;
2. $P(X \geq 28)$;
3. $P(X \geq 20)$;
4. $P(X \geq 12)$;
5. $P(12 \leq X \leq 28)$.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ.
    3.1 Déterminer les valeurs appropriées de m et σ.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ.
   - 3.1 Déterminer les valeurs appropriées de m et σ.
   - 3.2 En utilisant l'approximation, calculer de nouveau la probabilité $P(E)$.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ.

   3.1 Déterminer les valeurs appropriées de m et σ.
   3.2 En utilisant l'approximation, calculer de nouveau la probabilité $P(E)$.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ.
   - 3.1 Déterminer les valeurs appropriées de m et σ.
   - 3.2 En utilisant l'approximation, calculer de nouveau la probabilité $P(E)$.
4.
   - 4.1 Tracer le diagramme en bâtons de la fonction qui à t associe $P(X = t)$ en utilisant une échelle convenable.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ.
   - 3.1 Déterminer les valeurs appropriées de m et σ.
   - 3.2 En utilisant l'approximation, calculer de nouveau la probabilité $P(E)$.
4.
   - 4.1 Tracer le diagramme en bâtons de la fonction qui à t associe $P(X = t)$ en utilisant une échelle convenable.
   - 4.2 Sur le graphique précédent, représenter la densité de probabilité de la loi normale $N(m; \sigma)$. Que constate-t-on ?