Mathématiques

Mis à jour le 18 novembre 2018 à 22:48

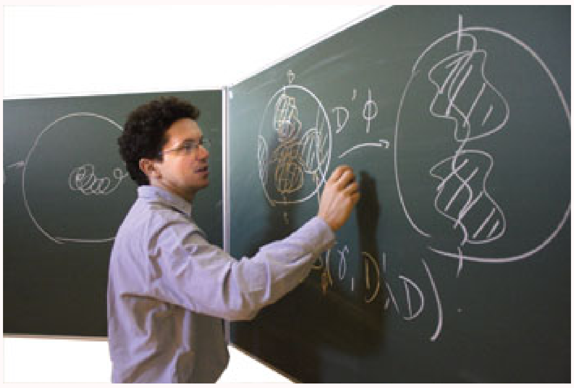
Une année de mathématiques en T$^{\text{ale}}$S

Notre Dame LYCÉES Rezé

Guillaume CONNAN

THÈME N° 5

Probabilités discrètes



En 2006, un probabiliste reçoit pour la première fois une médaille Fields. Il s'agit du français Wendelin WERNER. Voici comment il décrivait ses travaux : « *Take scissors and cut completely at random a shape in a piece of paper. What can you say about this shape? Part of the question is to make sense of notion "completely at random" because there are infinitely many possibilities. One motivation to study this type of question comes from physics : If you consider a physical system and raise its temperature, then at certain values of the temperature, there occurs sudden change of its macroscopic behaviour : Liquid becomes vapour, iron looses its spontaneous magnetisation etc. It has been observed empirically that when a system is exactly at such a "critical" temperature, it can exhibit random macroscopic features. For instance, if the system is planar, then the two phases may coexist and the lines separating the regions corresponding to each of the phases are then random loops, just as those cut out by scissors.* »
C'est l'aboutissement de presque 400 ans d'évolution depuis le mémoire sur les jeux de hasard de Gerolamo CARDANO au XVIe siècle en passant par l'axiomatisation des probabilités en 1933 par КОЛМОГОРОВ.

1 Préambule énigmatique : le hasard, ça existe ?

Le hasard est symbolisé par le lancement d'un dé. Pourtant, rien n'est plus *déterministe* ! Le dé obéit aux lois physiques : inertie, friction, élasticité et bien sûr la gravité. On connaît parfaitement ces lois assez simples à étudier...et pourtant...
Les jeux de hasard dans un casino ou le choix aléatoire de nombres nécessaires à la sécurité informatique dépendent d'une fonction qui renvoie un nombre *au hasard*. Mais comment un algorithme peut-il renvoyer un nombre au hasard ? D'autant plus que ces nombres sont générés par une formule du style :

$$X_{n+1} = (a \cdot X_n + c) \mod m$$

2 Préambule philosophiqe : le hasard, qu'est-ce que c'est ?

FIGURE 5.1 – Pierre-Simon de LAPLACE (1749 - 1827)

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent *axiomatique*) en a été proposée trois siécles avant JC par le grec EUCLIDE, il a fallu attendre le XVI[e] siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu.
Qu'est-ce que le hasard ?
Parmi toutes les définitions possibles, nous en retiendrons deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

- **pour certains**, tout a une cause, et le hasard n'est que le reflet de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature. Cet esprit souffla particulièrement au XVIII[e] siécle au moment où LAPLACE posa les bases d'une première théorisation des probabilités. C'est dans cet esprit que vous avez étudié les probabilités jusqu'ici. Les probabilités sont alors déterminées *a priori*, par des considérations non expérimentales. Par exemple, un dé a six faces, donc, on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de $1/6$. Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de PASCAL, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourrir à l'expérience. Elle implique la notion centrale d'**équiprobabilité** : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.

  Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ? Nous en reparlerons un peu plus loin.
- **pour d'autres**, le hasard constitue notre univers. La théorie du chaos mise en forme par René Thom en 1955 montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent que d'obtenir une estimation des états possibles futurs. Les probabilités ne peuvent alors être calculées a priori.

Cet antagonisme peut se résumer en considérant l'expérience très simple suivante : on jette une punaise en l'air ; va-t-elle retomber sur la pointe ou sur la tête ?
Pour les « Laplaciens », il existe un nombre parfaitement déterminé, mais pas encore calculable *a priori*. On peut néanmoins l'approcher par une série de mesures expérimentales.
Pour d'autres, c'est prêter à la Nature des intentions mathématiques, alors que cette interprétation chiffrée n'est qu'œuvre humaine.

Qui a raison ? Qui a tort ? Le débat est encore ouvert. Nous pouvons néanmoins réunir deux grands groupes. Ceux qui prônent une étude expérimentale des probabilités ne sont en fait pas très éloignés des « Laplaciens », car l'idée centrale contenue dans la Loi des grands nombres qui gouverne les probabilités du lycée (en gros, la limite[a] des fréquences observées est égale à la probabilité : plus on fait de mesures, plus la fréquence se rapproche de la probabilité) est basée sur la définition Laplacienne de la probabilité : cas favorables sur cas possibles.

a. il s'agit de la limite stochastique qui n'a rien à voir avec les limites étudiées au lycée...

Inversement, la géométrie du hasard des Laplaciens (1 chance sur 6 d'obtenir chacune des faces d'un dé) repose sur la parfaite symétrie du dé. Mais un dé peut-il être parfaitement symétrique ? Pour le vérifier, il faudrait faire un grand nombre d'expériences...

Bref, au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent. Mais il faut les avoir en tête : tout n'est pas équiprobable (voir le jeu du *passadieci* que nous allons étudier) et la probabilité ne peut se réduire à la limite des fréquences, ne serait-ce que dans le cas d'une expérience qui ne peut se répéter : quelle est la probabilité de survivre à une guerre nucléaire ? Il semble difficille d'imaginer une série d'expériences pour s'approcher de cette probabilité...

Mêmes si elles peuvent apparaître antagonistes, ces deux notions ont en commun de postuler que l'issue de l'expérience (le jeter d'un dé) est indépendant de l'observateur. Ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie. Comme le disait John Stuart Mill : *we must remember that the probability of an event is not a quality itself, but a mere name for the degree of ground which we, or someone else, have for expecting it.* Faute de données sures, en économie on estime a priori les probabilités de certains événements élémentaires, puis on utilise ensuite des théorèmes abstraits issus des mathématiques.

Oublions tout ce que nous venons de dire !

Figure 5.2 – Андрей Николаевич КОЛМОГОРОВ (1903 - 1987)

A-t-on besoin de savoir tout ça pour réussir au Bac ? Par exemple, depuis votre tendre enfance, vous calculez avec les nombres entiers sans connaître les axiomes de Peano, vous travaillez en géométrie euclidienne même si elle ne correspond pas à la réalité : avez-vous déjà rencontré un véritable triangle rectangle ? Et pourtant vous arrivez quand même à démontrer le théorème de Pythagore.

Mais le débat est plus passionné au sujet des probabilités car il a fallu attendre 1933 et le Russe Колмогоров., dont vous pouvez apprécier le sourire ci-contre, pour enfin les axiomatiser, alors qu'Euclide avait fait cela pour la géométrie 2300 ans plus tôt...

C'est ce sujet encore brûlant que nous allons encore explorer cette année à travers quelques chapitres qui sauront, je n'en doute pas, vous passionner !

Ce qu'ils en pensent

« *Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ?* »

Henri Poincaré - La Science et l'hypothèse (1908)

« *[La théorie des probabilités] donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugements. [...] Il n'est point de science plus digne de nos méditations, et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique.* »

Pierre Simon de Laplace - Essai philosophique sur les probabilités (rédigé de 1795 à 1825)

« *The true logic of this world lies in the calculus of probabilities* »

James C. Maxwell - The Scientific Letters and Papers of James C. Maxwell, Vol. 1, 1846-1862

« *We cannot predict whether a given photon will arrive at A or B. All we can predict is that out of 100 photons that come down, an average of 4 will be reflected by the front surface. Does this mean that physics, a science of great exactitude, has been reduced to calculating only the probability of an event, and not predicting exactly what will happen ? Yes. That's a retreat, but that's the way it is : Nature permits us to calculate only probabilities. Yet science has not collapsed.* »

Richard P. Feynman - The strange theory of light and matter (1985)

« *The generation of random numbers is too important to be left to chance.* »

Clifford Pickover - Computers, Pattern, Chaos and Beauty, Courier Corporation, (2012)

3 Préambule ludique : au commencement était le jeu

FIGURE 5.3 – Gerolamo CARDANO (1501 - 1576)

C'est comme ça que tout a commencé et ce sera notre fil rouge tout le long de ce chapitre. CARDANO a été un des scientifiques les plus importants de la Renaissance dans des domaines aussi divers que les mathématiques, la physiaue, la chimie, l'astronomie, la philosophie,...Il est célèbre pour ses travaux sur les gyroscopes, le...*cardan* en mécanique, les nombres imaginaires, l'étude des équations du troisième et du quatrième degré.
C'était également un joueur invétéré ce qui l'a incité à être l'un des fondateurs de la future théorie des probabilités dans son *Liber de ludo aleae* écrit vers 1564. Il a pris les jeux de dés pour illustrer son propos. On trouve notamment l'étude du problème des trois dés.
Le jeu du *passadieci* consistait à lancer trois dés et à additionner le numéro des faces. Il fallait obtenir au moins 11 pour gagner.
Presqu'un siècle plus tard, GALILÉE publia *Sopra le Scoperte dei Dadi*, un mémoire sur le même problème que lui avait en fait posé son protecteur, le Grand Duc de Toscane :

> Supposons que trois dés soient lancés et que les trois numéros obtenus soient additionnés. Les scores de neuf, dix, onze et douze peuvent être obtenus avec six combinaisons différentes. Pourquoi alors une somme de dix ou onze apparaît plus souvent qu'une somme de neuf ou douze ?

Recherche Résolvez le problème du Duc de Toscane

Pour vous aider, voici ce qu'en dit CARDANO :

CAPVT XIII.

De Numeris compositis, tam usque ad sex, quam ultra, & tam in duabus Aleis, quam in tribus.

IN duabus Aleis duodecim, & vndecim constant eadem ratione, qua bis, sex, atque sex, & quinque. Decem autem ex bis quinque, & sex, & quatuor, hoc autem variatur dupliciter, erit igitur totum duodecima pars circuitus, & sexta æqualitatis. Rursus ex nouem, & quinque, & quatuor, & sex, ac tribus, vt sit nona pars circuitus æqualitatis duplum nonæ partis. Octo autem puncta sunt ex bis quatuor, tribus, & quinque, ac sex, & duobus. Totum quinque septima fermè circuitus pars, & duæ septimæ æqualitatis. Septem autem, ex sex, & vno quinque, ac duobus quatuor, ac tribus. Omnia igitur puncta sunt sex, tertia pars æqualitatis, & sexta circuitus. At sex vt octo, & quinque, vt nouem; quatuor, vt decem, tria vt vndecim, & duo, vt duodecim.

Sed in Ludo fritilli vndecim puncta, adiicere decet, quia vna Alea potest ostendi erunt igitur duorum punctorum ictus duodecim, & ita bes æqualitatis, & triens circuitus. Tria autem tredecim, quatuor autem quatuordecim, quinque quindecim, dextans æqualitatis, & à toto circuitu quincunx. Sex autem sexdecim, & valde propè æqualitatem.

Consensus sortis in duabus Aleis.

2	12	1	3	11	2	4	10	3.	Æqual.
5	9	4	6	8	5	7	8	18.	Ad Frit.

Consensus sortis in tribus Aleis tum Frit.

Sortis			Fritilli.	
			3	115
3	18	1	4	125
4	17	3	5	126
5	16	6	6	133
6	15	10	7	33
7	14	15	8	36
8	13	21	9	37
9	12	25	10	36
10	11	27	11	38
			12	26

Circuitus 216.
Æqualitas 108.

FIGURE 5.4 – Chapitre 13 du *Liber de Ludo Aleae*

Pour vous éviter de lancer un million de fois trois dés, faisons faire la sale besogne à Python :

```python
from numpy.random import randint
from collections  import Counter

nbExp = 10**6
```

```
lesSommes = [sum( randint(1,7,size = 3) )  for k in range(nbExp)]

effectifs = Counter(lesSommes)
```

et nous obtenons :

```
In [1]: effectifs
Out[1]:
Counter({3: 4662,
         4: 13696,
         5: 27906,
         6: 46576,
         7: 69602,
         8: 96970,
         9: 115599,
         10: 125020,
         11: 125103,
         12: 115728,
         13: 97174,
         14: 69291,
         15: 46405,
         16: 27640,
         17: 14007,
         18: 4621})
```

Est-ce qu'on s'intéresse aux évènements du style « obtenir ⚃ ⚃ ⚁ » ? « obtenir ⚃ ⚁ ⚃ » ? « obtenir ⚄ ⚀ ⚃ » ?
Ou bien « obtenir une somme égale à 10 » ?
Il est temps de passer à un peu de théorie...

4 Rappels de 1ère : loi de probabilité

Vous vous souvenez que l'univers probabilisable, souvent noté Ω, est constitué de toutes les « éventualités » ou « issues » d'une expérience aléatoire.
Avant de parler de lois de probabilités, penchons nous sur le terme *discrètes* : il traduit le fait que l'on peut « dénombrer » chacune des issues ; on peut leur donner un numéro. Nous étudierons en Terminale des lois de probabilité continues : on ne pourra pas donner un numéro à chacune des issues ; par exemple, on ne peut pas compter tous les nombres réels compris entre 2 et 3.

Définition 5 - 1

Variable aléatoire (réelle)
Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ un univers muni d'une probabilité. On appelle **variable aléatoire** toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$...qui a certaines propriétés que nous ne pouvons pas décrire à notre niveau...

Bon, c'est un peu frustrant mais il faut juste en fait que chaque image réciproque d'un intervalle de $\mathbb{R}$ soit un évènement de Ω dont on peut calculer la probabilité...Mouais.
La définition précédente n'est pas très parlante, il faut essentiellement retenir que l'on va s'intéresser à des événements décrits par des nombres, les variables aléatoires nous permettent de décrire, et donc de noter, facilement des événements à l'aide de nombres.
Une v.a. est *réelle* car X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et *finie* car l'univers est fini donc l'ensemble image de X aussi.

Danger

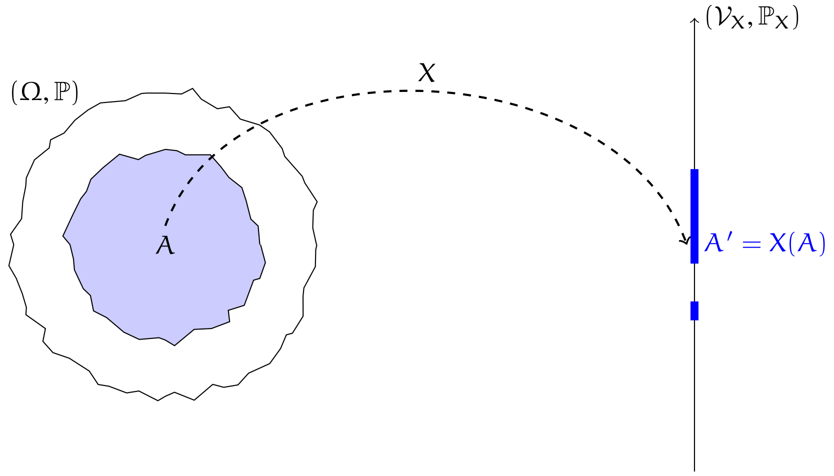
Vous noterez qu'une *variable* aléatoire réelle (v.a.r. pour les intimes) est en fait une *fonction* !...

Soit $x_1, \cdots, x_k$ les différentes valeurs prises par la fonction X. On note $\{X = x_i\}$ l'événement « la variable aléatoire prend la valeur x_i ». Il se note rigoureusement

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$$

ce qui se lit « l'ensemble des évènements ω de l'univers Ω tels que $X(\omega) = x_i$ ».

Nous noterons $\mathcal{V}_X = X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la v.a. X.



Définition 5 - 2

Loi de probabilité
Soit (Ω, p) un univers muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$\varphi \ : \ x \mapsto \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$$

ou avec les abus de notation :

$$\varphi \ : \ x \mapsto \mathbb{P}(\{X = x\})$$

À retenir

Si $x \notin \Omega$, alors $\{X = x\} = \emptyset$ et donc $\mathbb{P}(\{X = x\}) = 0$.

À retenir

Ce qui sert vraiment - Méthode à suivre
Tout ce qui vient d'être écrit ne sert à rien. Ce qui est utile est de suivre la méthode suivante.
Définir *la loi de probabilité d'une expérience aléatoire* reviendra donc à :

- déterminer toutes les valeurs possibles $x_1, \cdots, x_n$ prises par X ;
- calculer les probabilités $p_1, \cdots, p_n$ des événements correspondants ;
- regrouper les résultats dans un tableau du type

Valeurs prises par X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilité correspondante $\mathbb{P}(\{X = x_i\})$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

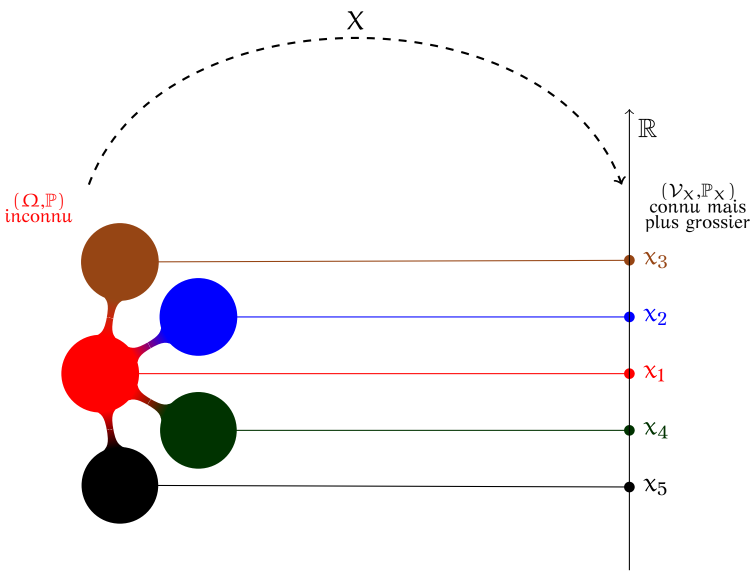
En général, on se trouve dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "X"] \arrow[d, "\mathbb{P} \text{ inconnue}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\mathbb{P}_X \text{ connue}"] \\
\mathbb{R} & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Aparté

Dans la vraie vie, on connaît les valeurs prises par la v.a.r. mais on ne connaît pas bien Ω, voire pas du tout. On réfléchit donc sur les lois et non pas sur des ensembles comme au lycée.
Par exemple, on peut vouloir réfléchir au nombre de plantages d'un réseau. On estime statistiquement les probabilités de tomber 0, 1, 2, etc. fois en panne dans une journée. On ne sait pas trop ce qu'est Ω mais on peut parler de la loi de X.
En fait, une variable aléatoire « transporte » les calculs de probabilités d'un univers inconnu vers des valeurs réelles connues.
La v.a.r. condense l'information sur l'univers en une information plus grossière (numérique) mais c'est déjà bien car en général on ne connaît de toute manière pas ou peu l'univers de départ !...
On retiendra donc que le « praticien » travaille la plupart du temps avec des lois de probabilités et non pas des ensembles : cela simplifie son travail car il peut travailler sur des espaces complexes (l'univers de départ est souvent trop complexe voire inconnu) sans les connaître.

L'information donnée par la loi est souvent plus grossière : par exemple, on lance deux dés et on regarde la somme des deux faces. On a normalement 2^{36} évènements possibles (pourquoi ?...croyez-moi sur parole !) alors que dans le nouvel univers il n'y a plus que 2^{11} évènements (il y a 11 sommes possibles).



Danger

Deux v.a.r. peuvent avoir la même loi sans être égales ! On lance n fois une pièce non truquée. Considérez X le nombre de pile tombés et $n - X$ le nombre de face. Ces deux v.a.r. suivent la même loi et pourtant elles ne sont pas égales.

5 Rappels de 1ère : variance et espérance

5 1 Espérance mathématique

Définition 5 - 3

Espérance mathématique
On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire discrète X le nombre noté $\mathbb{E}(X)$ défini par

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot \mathbb{P}(\{X = x_1\}) + x_2 \cdot \mathbb{P}(\{X = x_2\}) + \cdots + x_n \cdot \mathbb{P}(\{X = x_n\}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{P}(\{X = x_i\})$$

Exemple : on lance un dé honnête. On définit la variable aléatoire X qui prend la valeur 2 si le numéro du dé est pair et 1 sinon.
Notons ω_i l'événement « le numéro de la face est i », alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ et

i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\omega_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$X(\omega_i)$	1	2	1	2	1	2

D'après le théorème précédent, on a $\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$
Nous aurions pu procéder autrement pour définir la loi de probabilité :

Valeurs x_i prises par X	1	2
$\mathbb{P}(\{X = x_i\})$	1/2	1/2

alors, d'après la définition, $\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

À retenir

L'espérance est la moyenne des valeurs prises par la v.a.r. pondérée par leurs probabilités respectives ce qui est assez logique

5 2 Variance

La variance mesure l'« écart » par rapport à l'espérance en faisant la somme des carrés des « distances » entre chaque valeur prise par la variable aléatoire et l'espérance pondérées par la probabilité correspondante, ce qui donne :

Définition 5 - 4

Variance

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)^2 \cdot \mathbb{P}(\{X = x_i\})$$

On a choisi d'utiliser les carrés de manière arbitraire pour ne pas avoir de problèmes de signes ; on aurait pu choisir une autre méthode mais celle-ci a l'avantage de rappeler la distance euclidienne bien connue. La variance est en ce sens homogène au carré d'une distance. On va donc définir une distance proprement dite en en prenant la racine carrée : c'est ce qu'on appelle l'**écart-type**.

Définition 5 - 5

Écart-type

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Vous pouvez obtenir espérance, variance et écart-type très simplement à l'aide des modules statistiques de vos calculatrices. Il suffit de rentrer les valeurs prises par la variable aléatoire en liste 1, les probabilités correspondantes en liste 2.

5 3 Linéarité de l'espérance

À partir de variables aléatoires existantes, on peut en créer de nouvelles.
Avec des notations usuelles on obtient :
$aX + b : \omega_i \mapsto aX(\omega_i) + b$ avec a et b des réels.
On peut alors démontrer la propriété suivante :

Théorème 5 - 1

Linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) \cdot \mathbb{P}(\{X = x_i\}) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Notons $Y = aX + b$.
Pour tout $\omega_i \in \Omega$ on a $Y(\omega_i) = aX(\omega_i) + b$ et donc $y_i = ax_i + b$ avec les notations usuelles donc $\left\{\omega \in \Omega | Y(\omega) = y_i\right\} = \left\{\omega \in \Omega | aX(\omega) + b = ax_i + b\right\} = \left\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\right\}$
Alors

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{P}(Y = y_i) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b)\mathbb{P}(X = x_i) = a \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i) + b \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)$$

On en déduit que $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Recherche

Théorème de König-Huygens
Johann KÖNIG (1712-1757) fut un mathématicien allemand, élève de Jean BERNOULLI et Christian HUYGENS (1629-1695) était lui néerlandais.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

À démontrer...

6 Dénombrements

6 1 Permutations

Le Père Noël a offert à ma petite cousine Josette un jeu de cubes où sont inscrits les lettres de l'alphabet.
Très pédagogue, je lui donne d'abord les trois cubes A, B et C. Combien de « mots » de 3 lettres peut-elle alors former ? Et si je lui en donne quatre ? vingt-six ? trente-deux ?
Moralité : avec un ensemble *(non ordonné)* $\{a, b, c\}$ de trois éléments, je peux former $3 \times 2 \times 1$ listes *(ordonnées)*, comme par exemple (a, b, c), (b, a, c), (c, b, a), etc.
Je peux donc *permuter* 3 cubes de $3 \times 2 \times 1$ manières différentes.

Définition 5 - 6

factorielle
Soit n un entier naturel non nul. Le nombre $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ est appelé **factorielle** $\mathbf{n}$. On note

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Conventionnellement, $0! = 1$.

D'après notre petite étude, nous pouvons donc dire maintenant que :

Théorème 5 - 2

nombre de permutations
Le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant n éléments est $n!$.

Exemple

1. il y a trente-deux chaises dans une salle. *Dénombrer* toutes les manières possibles pour les 30 élèves de TS_4 d'occuper les chaises de la salle ;
2. Combien y a-t-il d'annagrammes du mot ZOÉ ? du mot ANA ?

6 2 Combinaisons

Il n'y a pas assez de gagnants au loto. Il faut redonner espoir aux Syldaves. Le nouveau président modifie donc les règles. Il s'agit maintenant de trouver 3 numéros parmi 5. Combien y a-t-il de grilles (combinaisons) possibles ?
Par exemple, on pourrait dire que j'ai cinq manières de choisir le premier numéro, quatre choix pour le deuxième et trois choix pour le troisième, donc il y a $5 \times 4 \times 3$ grilles différentes, MAIS

Posons une petite définition pour clarifier les débats. Donnons en fait un nom à une grille du loto, c'est à dire à un sous-ensemble (une partie) contenant p éléments d'un plus grand ensemble contenant n éléments.

Définition 5 - 7

combinaison
Soit n et p deux entiers naturels et E un ensemble contenant n éléments. Un sous-ensemble de E contenant p éléments est appelé une **combinaison** de p éléments de E ou encore une **p-combinaison** d'éléments de E.

Or ce qui nous intéresse, c'est le nombre de ces combinaisons, donc introduisons une notation :

Définition 5 - 8

nombre de combinaisons
Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble contenant n éléments est noté $\binom{n}{p}$

Revenons à notre mini-loto. Considérons une grille quelconque (c'est à dire une 3-combinaison de l'ensemble des 5 numéros) : par exemple $\{2, 4, 5\}$. Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il y a 3! facons d'ordonner ces nombres. Finalement, il y a $\binom{5}{3} \times 3!$ suites de 3 nombres ordonnées. Or nous en avons comptées $5 \times 4 \times 3$ tout à l'heure. Nous en déduisons finalement que

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!}$$

Il est alors aisé de généraliser la formule suivante :

Propriété 5 - 1

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))}{p!}$$

Nous pouvons formuler cette propriété plus synthétiquement. En effet :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!} \times \frac{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)\times\cdots\times 2\times 1}{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)\times\cdots\times 2\times 1} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!}\end{aligned}$$

d'où :

Théorème 5 - 3

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

6 3 Triangle de Pascal - Binôme de Newton

6 3 1 Raisonnement calculatoire

À l'aide des formules précédentes, établissez que :

Propriété 5 - 2

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Établissez, toujours par le calcul, la relation suivante, dite **Relation de Pascal** même si les mathématiciens chinois l'avaient mise en évidence avant lui :

Propriété 5 - 3

relation de Pascal

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Cette relation permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche, ce qui s'avère fort utile car la fonction factorielle croît extrêmement rapidement et dépasse vite les capacités d'une calculatrice de poche.
Ainsi, la procédure suivante permet de calculer les coefficients binomiaux assez rapidement avec la calculatrice. Pour calculer $\binom{32}{10}$

RUN ×÷+− touches OPTN PROB, 3 2 nCr 1 0 EXE

6 3 2 Raisonnement ensembliste

Si je forme un groupe de 3 élèves dans la classe, j'obtiens du même coup un groupe de $30-3=27$ élèves puisque vous êtes 30 : le groupe de ceux qui ne sont pas dans votre groupe.

Si l'on compte le nombre de parties A ayant p éléments dans un ensemble E, il revient au même de compter le nombre de parties complémentaires de A. En quoi ce raisonnement nous permet-il d'obtenir une des formules précédentes ?

Considérons la classe de TS3 et ses 30 élèves. Je veux dénombrer les groupes de trois élèves. On peut distinguer deux types de groupes :

- ceux qui ne vous contiennent pas. Il faut donc former des groupes de 3 avec les 29 élèves restant : ça fait combien ?
- ceux qui vous contiennent. On vous ajoute aux groupes de 2 formés avec les 29 élèves restant. Ça fait combien ?

Tenez un raisonnement similaire pour établir la relation de Pascal.

6 3 3 Formule du binôme de Newton

Sir Isaac n'a pas fait que dormir sous un pommier. Il a par exemple établi que :

Théorème 5 - 4

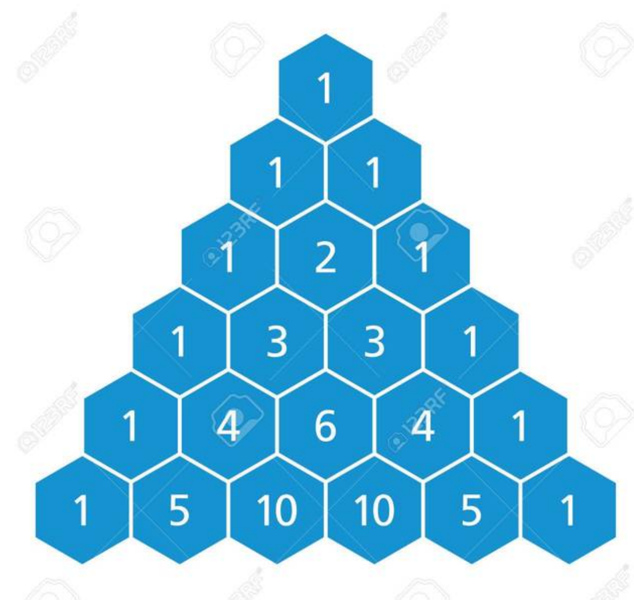
Formule du binôme de Newton
Soit a et b des nombres complexes et n un entier naturel non nul, alors

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

On peut prouver cette formule par récurrence en remarquant que $(a+b)^{k+1} = a(a+b)^k + b(a+b)^k$ et en utilisant la relation de Pascal au bon moment.

Cette formule nous permet donc d'obtenir de nouveaux « produits remarquables », à conditions de connaître les coefficients binomiaux.

Testez la formule aux rangs 2, 3, 4, 5. Disposez vos résultats dans un tableau en n'écrivant que les coefficients et conjecturer le triangle de Pascal...



7 Rappels de 1ère : ce que vous devez maîtriser avant la Terminale

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Variables aléatoires discrètes et lois de probabilité. Espérance, variance et écart-type	Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire. Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.	À l'aide de simulations et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on fait le lien avec la moyenne et la variance d'uine série de données. On exploite les fonctionnalités de la calculatrice ou d'un logiciel pour déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire. On démontre les formules suivantes : $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$ et $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$
Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues.	Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré. Utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation.	Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. La notion de probabilité conditionnelle est hors programme. On peut aussi traiter quelques situations autour de la loi géométrique tronquée. On peut simuler la loi géométrique tronquée
Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues.	▶ Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré. ▶ Utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation.	Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. On peut aussi traiter quelques situations autour de la loi géométrique tronquée. On peut simuler la loi géométrique tronquée avec un algorithme.
Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli Schéma de Bernoulli, loi binomiale (loi du nombre de succès). Coefficients binomiaux, triangle de Pascal.	Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale. Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale. ROC : démontrer que $\binom{k}{n}+\binom{k+1}{n}=\binom{k+1}{n+1}$ Représenter graphiquement la loi binomiale.	La représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. On peut ainsi : faciliter la découverte de la loi binomiale pour des petites valeurs de n ($n \leqslant 4$). Introduire le coefficient binomial $\binom{k}{n}$ comme nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions ; Établir enfin la formule générale de la loi binomiale. On établit également la propriété de symétrie des coefficients binomiaux. L'utilisation des coefficients binomiaux dans des problèmes de dénombrement et leur écriture à l'aide des factorielles ne sont pas des attendus du programme. En pratique, on utilise une calculatrice ou un logiciel pour obtenir les valeur s des coefficients binomiaux, calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale.
Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale.	Utiliser l'espérance d'une loi binomiale dans des contextes variés.	La formule donnant l'espérance de la loi binomiale est conjecturée puis admise, celle de la variance est admise. On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme.

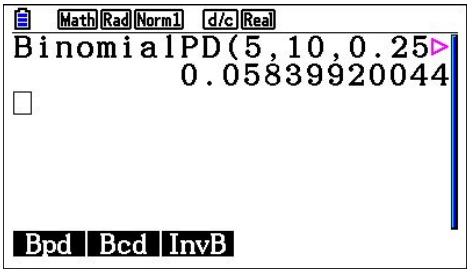
Recherche Pointer dans le poly les parties qui correspondent aux notions de la seconde colonne de la première ligne, ce qui sert quoi.

7 1 GRAPH 35 et loi binomiale

7 1 1 Calcul de P(X=k)

Supposons que X suive la loi $\mathcal{B}(10, 0.25)$. On veut calculer $\mathbb{P}(X = 5)$.

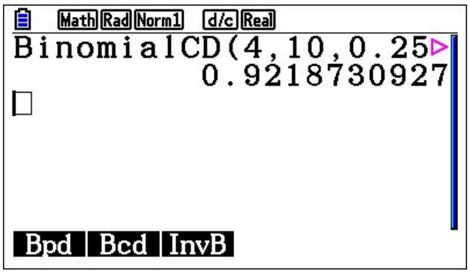
Dans le menu de calcul RUN touches OPTN STAT, DIST, BINM, Bpd. Renseigner alors les trois valeurs k, p et n : 5 , 1 0 , 0 . 2 5) EXE



7 1 2 Calcul de P(X<k)

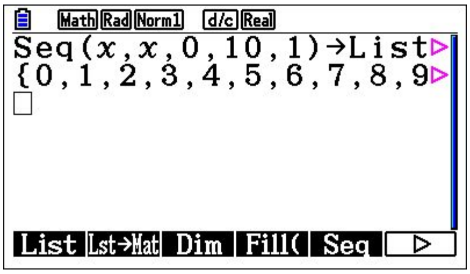
Supposons que X suive la loi $\mathcal{B}(10, 0.25)$. On veut calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 4)$.

Dans le menu de calcul RUN touches OPTN STAT, DIST, BINM, Bcd. Renseigner alors les trois valeurs k, p et n : 4 , 1 0 , 0 . 2 5) EXE

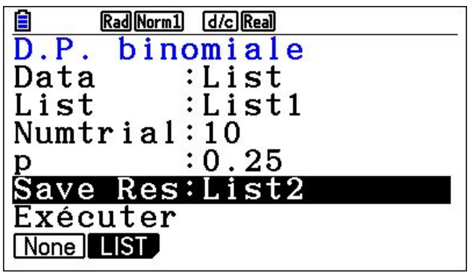


7 1 3 Représentation graphique

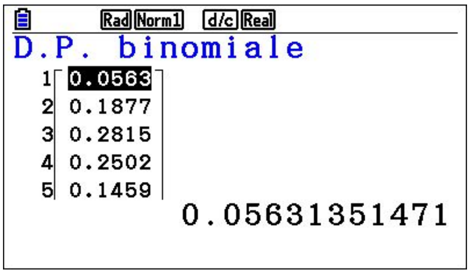
Dans le menu de calcul RUN touches OPTN LIST Seq puis X,θ,T , X,θ,T , 0 , 1 0 , 1) → List 1 EXE



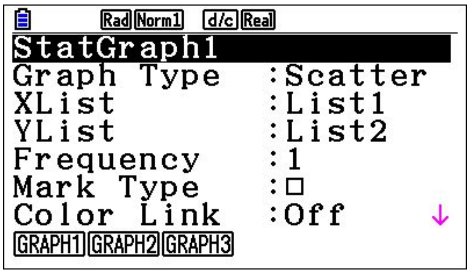
Dans le menu STAT DIST, BINM, Bcd et modifiez pour obtenir :



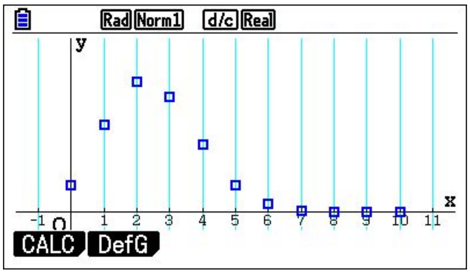
puis EXE



puis EXIT EXIT GRPH,SET



EXE GPH1



8 Terminale : PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

8 1 Description statistique

Une enquête est effectuée auprès des 100 élèves d'un lycée syldave concernant le temps de travail hebdomadaire et le sexe des élèves.
On a obtenu le tableau suivant

travail / sexe	< 5 minutes	$\geqslant 5$ minutes
filles	20	15
garçons	60	5

Soit T l'ensemble de ceux qui travaillent plus de 5 minutes par semaine et G l'ensemble des garçons. Alors on notera T le complémentaire de T dans la population totale du lycée, et G celui de G, c'est à dire l'ensemble des filles.
Alors on peut construire le tableau des fréquences correspondant

travail / sexe	T	T	fréquence par sexe
G	20%	15%	35%
G	60%	5%	65%
fréquence par temps de travail	80%	20%	100%

8 2 Exemple de modélisation probabiliste à partir d'une situation statistique

Une situation probabiliste n'existe que s'il y a une expérience (à issue) aléatoire. Il faut pour cela introduire par exemple l'expérience habituelle « on prélève au hasard un élève du lycée syldave ». L'ensemble des issues de cette expérience est appelé mathématiquement l'**univers**, souvent noté Ω : c'est ici l'ensemble des 100 élèves du lycée.
Les parties T et G de Ω sont des **événements** qui seront décrits à l'aide de phrase entre guillemets. Par exemple, G est l'événement « l'élève syldave prélevé est un garçon ».
On suppose les élèves syldaves indiscernables à la vue, l'ouïe, le goût, le toucher et l'odorat : cette condition assure l'**équiprobabilité** vue en Première.
Ainsi, la probabilité que l'élève prélevé travaille plus de 5 minutes vaut $\mathbb{P}(\mathrm{T}) = \dfrac{20}{100}$, la probabilité pour que ce soit un garçon vaut $\mathbb{P}(\mathrm{G}) = \dfrac{65}{100}$ et la probabilité pour que l'élève prélevé soit un garçon qui travaille plus de 5 minutes vaut $\mathbb{P}(\mathrm{G} \cap \mathrm{T}) = \dfrac{5}{100}$
Maintenant, **parmi les garçons**, on en choisit un au hasard. L'univers a donc changé, mais pas les propriétés du tirage, ce qui assure encore l'équiprobabilité.
La probabilité pour que ce garçon travaille plus de 5 minutes vaut $\dfrac{5}{65} = \dfrac{1}{13}$.
On dit que c'est **la probabilité conditionnelle de T sachant G** qu'on note $\mathbb{P}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$.
On constate ici que $\mathbb{P}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \dfrac{5}{65} = \dfrac{5/100}{65/100} = \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{T} \cap \mathrm{G})}{\mathbb{P}(\mathrm{G})}$. Or ce résultat est totalement indépendant des données numériques et ne dépend pas de l'équiprobabilité, donc on l'adoptera comme définition.

8 3 Une probabilité, au fait, qu'est-ce que c'est ?

Question bête, et pourtant... Vous avez découvert les années précédentes les probabilités dans un cas bien particulier : vous les définissiez comme **le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles**. Cette manière de définir les probabilités est étroitement liée d'une part au fait que l'univers soit un ensemble fini et d'autre part au fait que chaque événement élémentaire a la même probabilité (cas d'**équiprobabilité**). Nous en reparlerons plus en détail au moment de l'étude des lois continues en fin d'année, mais autant avoir tout de suite une définition du concept de probabilité applicable dans un cadre général.

Définition 5 - 9

probabilité
Notons Ω l'ensemble des issues possibles d'une expérience (l'univers).
On appelle probabilité sur Ω toute fonction $\mathbb{P}$ allant de l'ensemble des sous-ensembles de Ω dans $[0,1]$ et vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ pour tous sous-ensembles A et B de Ω *disjoints*.

Recherche

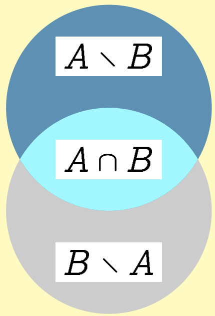
Vous vérifierez qu'à partir de cette définition, on obtient les propriétés usuelles

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Pour la dernière propriété, je vous donne un petit coup de pouce : il faut découper notre réunion en ensembles disjoints en écrivant par exemple que

- $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$
- $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$
- $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

Vérifiez également que $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.



À retenir

Une probabilité est une fonction qui permet de **mesurer** le degré de certitude d'un évènement sur une échelle de 0 à 1

Danger

Faîtes bien attention maintenant à ne pas confondre univers fini et équiprobabilité. Considérez par exemple la situation suivante : on sonne à votre porte. Quelle est la probabilité pour que ce soit Emma Stone (ou Ryan Gosling si vous préférez) qui vienne vous demander en mariage ? L'univers ne contient que deux événements élémentaires : ou bien c'est Emma ou bien ce n'est pas Emma. Le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles est donc de 1/2, pourtant...

8 4 Un exemple pour comprendre

Considérons l'expérience simplissime consistant à lancer deux fois un dé à six faces. L'univers Ω est donc constitué de l'ensemble des couples (i, j), avec i et j appartenant à l'ensemble $[\![1, 6]\!]$: il y a donc 36 éléments dans Ω. Intéressons nous à la somme des deux chiffres et soit A l'événement « le total fait neuf ».

$$A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$$

donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer », alors

$$B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Jusqu'ici, tout roule. Posons-nous maintenant le problème suivant : sachant que B est réalisé, i.e. que l'on obtient 3 au premier lancer, quelle est la probabilité que le total fasse 9 ? On ne considère plus tous les éléments de Ω. Il semble alors nécessaire de définir un nouvel univers (notre nouvel ensemble des possibles) :

$$\Omega' = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\} = \Omega \cap B$$

Puisque l'univers change, la probabilité aussi. L'événement A' « le total fait neuf » dans ce nouveau modèle s'écrit

$$A' = \{(3,6)\} = A \cap B$$

et donc

$$\mathbb{P}'(A') = \frac{1}{6} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } B} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

On retrouve notre formule

Définition 5 - 10

probabilité conditionnelle
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. **La probabilité de *A* sachant *B*** est définie par

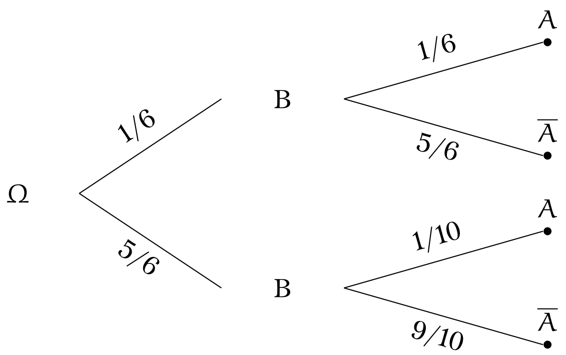
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Vous pourrez vérifier pour votre confort intellectuel, bien que ce ne soit pas explicitement au programme, que l'application $\mathbb{P}_B$ est bien une probabilité, qu'on appellera **probabilité conditionnelle sachant *B***.

Essayez de vous débrouiller tout(e) seul(e) avec la situation suivante : une boîte contient 10 vipères, 5 mygales et 15 piranhas super mutants de la mort. Un animal est sorti du sac au hasard et on constate que ce n'est pas une vipère. Quelle est la probabilité que la main de l'expérimentateur finisse en amuse-gueule pour un piranhas super mutant de la mort ?

8 5 Arbre

Reprenons l'exemple de la section 5.8.4 page ci-contre en répondant aux mêmes questions à l'aide d'un arbre *pondéré*, c'est à dire un arbre dont chaque branche est marquée de la probabilité (du poids) correspondant.
Alors la somme des probabilités de chaque « ramification » est égale à 1.



À l'aide de la formule des probabilités totales, il est aisé d'obtenir les résultats suivant :

1. **Calcul de $\mathbb{P}(A)$**
   B et $\overline{B}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(\overline{B} \cap A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}(\overline{B}) \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$$

   $$\mathbb{P}(A) = \tfrac{1}{6} \times \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{6} \times \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{9}$$

2. **Calcul de $\mathbb{P}(\overline{A})$**
   B et $\overline{B}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

   $$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(\overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{B}) \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(\overline{A})$$

   $$\mathbb{P}(\overline{A}) = \tfrac{1}{6} \times \tfrac{5}{6} + \tfrac{5}{6} \times \tfrac{9}{10} = \tfrac{8}{9}$$

3. **Probabilités conditionnelles**

   $$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{8}{9}} = \frac{5}{32}$$

   $$\mathbb{P}_A(\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{B} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \qquad \mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{9}} = \frac{27}{32}$$

8 6 Formules des probabilités totales

Si on découpe notre univers Ω en morceaux disjoints A_1, A_2, ... , A_n, on dit que A_1, A_2, ... , A_n réalise **une partition** de Ω.
Par exemple, séparer une classe en un groupe fille et un groupe garçon permet de réaliser une partition de la classe. Séparer une classe en un groupe fille, un groupe garçon et un groupe d'abonnés au chasseur syldave ne permet pas de réaliser une partition car certains élèves peuvent appartenir à deux groupes en même temps. Enfin séparer une classe en un groupe de porteurs de sandales avec chaussettes et un groupe d'imitateurs du Schblurb syldave ne permet pas de réaliser une partition car certains élèves ne sont ni dans l'un ni dans l'autre groupe.

Propriété 5 - 4

Formule des probabilités totales
Supposons donc qu'il existe une partition A_1, A_2, ... , A_n de Ω, alors

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$$

Cette union étant disjointe, on a donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

Pour illustrer ce résultat, reprenons l'arbre de la section précédente. Comme B et B réalisent une partition évidente de l'univers, nous obtenons, en appliquant la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} + \frac{5}{36} = \frac{1}{6}$$

8 7 Formule de Bayes : retournement d'un arbre

Cette formule correspond au « retournement » d'un arbre.

Théorème 5 - 5

Première formule de Bayes

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

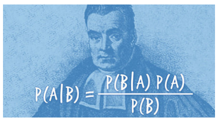


FIGURE 5.5 – Thomas BAYES (1701 - 1761)

On aurait pu écrire :

$$\mathbb{P}_{\text{effet}}(\text{cause}) = \frac{\mathbb{P}_{\text{cause}}(\text{effet}) \times \mathbb{P}(\text{cause})}{\mathbb{P}(\text{effet})}$$

Statistiquement, on a accès aux effets connaissant les causes (c'est le déterminisme...) mais dans la réalité, on subit les effets et on voudrait en connaître la cause.
Le cas le plus célèbre d'utilisation de la *statistique bayesienne* est le test de grossesse. Les médecins « disposent » d'un échantillon de femmes enceintes ou non (et donc de $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(\overline{E})$) et d'un test de grossesse. Ils font subir le test à tout l'échantillon et disposent donc de statistiques sur $\mathbb{P}_E(T)$, $\mathbb{P}_{\overline{E}}(\overline{T})$, $\mathbb{P}_{\overline{E}}(T)$ et $\mathbb{P}_E(\overline{T})$ mais ce qui intéresse le médecin et surtout la femme qui utilise le test c'est $\mathbb{P}_T(E)$ et $\mathbb{P}_{\overline{T}}(\overline{E})$...

8 8 Indépendance

La notions d'évènements indépendants est l'une des difficultés du calcul des probabilités. Comme souvent, cette notion purement mathématique renvoie, par son appellation, à une notion intuitive utilisée dans le langage courant. Il faut bien garder en mémoire que le mot du vocabulaire courant est souvent un « faux ami ».[b] Donnons tout d'abord sa définition.

Définition 5 - 11

Évènements indépendants
Les évènements A et B sont dits **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Ainsi, dans notre exemple de dés, on a $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A \cap B)$, donc le lancer du 2ème dé est indépendant du premier, ce qui est rassurant.

b. On aurait aussi bien parler de szjwrttrpgklance, mais cela aurait été plus difficile à prononcer.

Cette notion est purement abstraite et ne renvoie qu'à des propriétés mathématiques dont la principale est :

Théorème 5 - 6

Indépendance et probabilités conditionnelles
Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$

On peut faire dire ce que l'on veut à des probabilités selon le modèle choisi.
Supposons que sur un groupe de 100 personnes, 20 portent des sous-vêtements en polystirène expansé (pour avoir chaud l'hiver), 50 se grattent la tête avec l'index gauche et 10 font les deux à la fois. On met ces 100 personnes dans une boîte et on en tire une au hasard. Vérifiez que les évènements « la personne tirée porte des sous-vêtements en polystirène expansé » et « la personne tirée se gratte la tête avec l'index gauche » sont indépendants.
Étudiez le même problème en considérant cette fois-ci que 15 personnes se grattent la tête avec l'index gauche (pourquoi pas).[c]
Veillez à ne pas confondre évènements *indépendants* et évènements *incompatibles*.
On peut montrer d'ailleurs que deux évènements incompatibles de probabilité non nulle ne sont jamais indépendants.
En effet, A et B sont incompatibles si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a forcément $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
La seule idée à retenir est que , si A et B sont indépendants, **avoir observé la réalisation de *A* ne modifie pas la probabilité d'une éventuelle réalisation de *B***.
Ainsi, en supposant que la Française des Jeux n'utilise pas de boules truquées, on peut considérer que deux tirages successifs du loto sont indépendants.

c. De façon générale, la définition probabiliste de l'indépendance est plus large que la notion intuitive.

EXERCICES

Recherche 5 - 1 **Bac 2017**

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.
La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.
À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.
La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :
A l' évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».
On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0,03x + 0,95$.
2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.

   Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Recherche 5 - 2 **Bac 2017**

La société Fibration fournit des abonnements Internet et des abonnements de téléphone mobile. Un client de la société Fibration souscrit soit un abonnement Internet, soit un abonnement de téléphone mobile, il ne cumule pas les deux. En cas de difficulté, la société Fibration propose à ses clients une ligne d'assistance téléphonique : le client doit d'abord signaler s'il est client Internet ou s'il est client mobile puis son appel est mis en attente de réponse par un opérateur.
Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.
Si la durée d'attente avant l'obtention d'un opérateur dépasse 5 minutes, l'appel prend automatiquement fin. Sinon, l'appelant obtient un opérateur.
On choisit au hasard un client qui appelle la ligne d'assistance.
On admet que la probabilité que l'appel émane d'un client Internet est 0,7.
De plus, d'après la partie A, on prend les données suivantes :

- ▶ Si l'appel provient d'un client Internet alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,95.
- ▶ Si l'appel provient d'un client mobile alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,87.

1. Déterminer la probabilité que le client joigne un opérateur.
2. Un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur. Est-il plus probable que ce soit un client Internet ou un client mobile ?

Recherche 5 - 3 **Bac 2017**

Un entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam, Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé « dossier spam ». Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel, il constate que 58,6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam. Pour un message pris au hasard, on considère les évènements suivants :

- D : « le message est déplacé » ;
- S : « le message est un spam ».

1. Calculer $P(S \cap D)$.
2. On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à $0,04$.

3. On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?

Recherche 5 - 4 **Bac 2017**

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

1. soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
2. soit malade (atteint par le virus) ;
3. soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

PARTIE A

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

1. Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
2. Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
3. Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

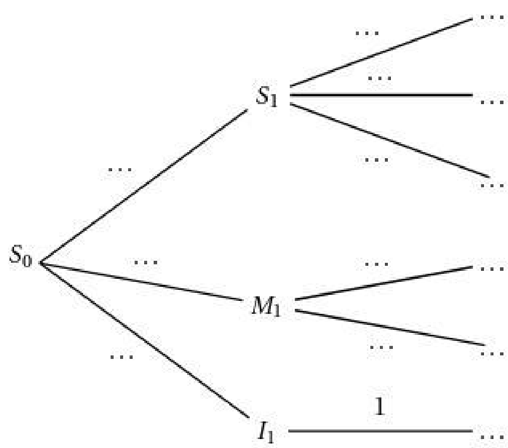
On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \; ; \; P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
   On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

Pour répondre aux questions **a.** *et* **b.** *suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

   i. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

   ii. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
   Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. i. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   ii. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
   Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Recherche 5 - 5 **Bac 2017**

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.
Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p.
Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement« Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

   i. Calculer la valeur de p.

   ii. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

Recherche 5 - 6 **Bac 2017**

Sofia souhaite se rendre au cinéma. Elle peut y aller à vélo ou en bus.
Sofia hésite entre le bus et le vélo. Elle décide de lancer un dé équilibré à 6 faces.
Si elle obtient 1 ou 2, elle prend le bus, sinon elle prend son vélo. On note :

- B l'évènement « Sofia prend le bus » ;
- V l'évènement « Sofia prend son vélo » ;
- C l'évènement « Sofia met entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma ».

1. Démontrer que la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que Sofia mette entre 12 et 14 minutes est de $0,49$.
2. Sachant que Sofia a mis entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma, quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'elle ait emprunté le bus ?

Recherche 5 - 7 **Bac 2018**

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^e partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

   Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   i. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   ii. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
   iii. La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

Recherche 5 - 8 **Bac 2018**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

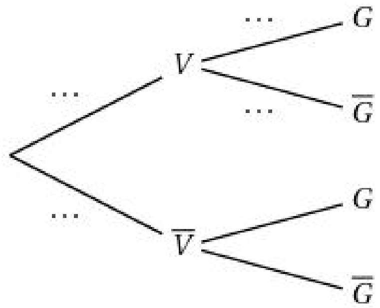
On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **i.** Donner la probabilité de l'évènement G.

ii. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à $0,4$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

i. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

ii. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

Recherche 5 - 9 Concours ENI-GEIPI 2016

Une chocolaterie fabrique deux sortes de chocolats : des chocolats noirs et des chocolats au lait.
60 % des chocolats fabriqués sont noirs. Parmi ceux-ci, 70 % sont fourrés, tandis que 30 % seulement des chocolats au lait sont fourrés.

Partie A

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte

Un client fait une dégustation de chocolats et il en choisit un au hasard.
On considère les évènements suivants :

N : « le chocolat choisi est noir »

F : « le chocolat choisi est fourré ».

1. Donner la probabilité P_1 que le chocolat choisi soit noir.

2. Déterminer la probabilité P_2 que le chocolat choisi soit noir et fourré.
Justifier la réponse.

3. On note P_3 la probabilité que le chocolat choisi soit fourré.
Justifier que $P_3 = 0,54$.

Partie B

Un client achète une boîte de n chocolats, où n est un entier naturel non nul.
Chaque chocolat mis dans la boîte est choisi au hasard et on suppose le nombre de chocolats suffisamment grand pour que l'on puisse considérer que les choix successifs sont faits de façon identique et indépendante.
On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de chocolats fourrés contenus dans la boîte.

1. X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. **Dans cette question n 12 et, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.**
   i. Donner la probabilité P_4 que la moitié des chocolats de la boîte soient fourrés.
   ii. Donner la probabilité P_5 que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.
   iii. Donner la probabilité P_6 que la boîte contienne au plus trois chocolats fourrés.
3. **Dans cette question, n est quelconque.**
   i. Donner, en fonction de n, la probabilité q_n que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.
   ii. Déterminer le nombre minimum n_0 de chocolats que doit acheter le client afin que la probabilité que la boîte contienne au moins un chocolat fourré soit strictement supérieure à $0,98$. Détailler les calculs.