Mathématiques

T^{ale}S3 / 2018-2019

Licence Creative Commons
Mis à jour le 11 mars 2019 à 22:50

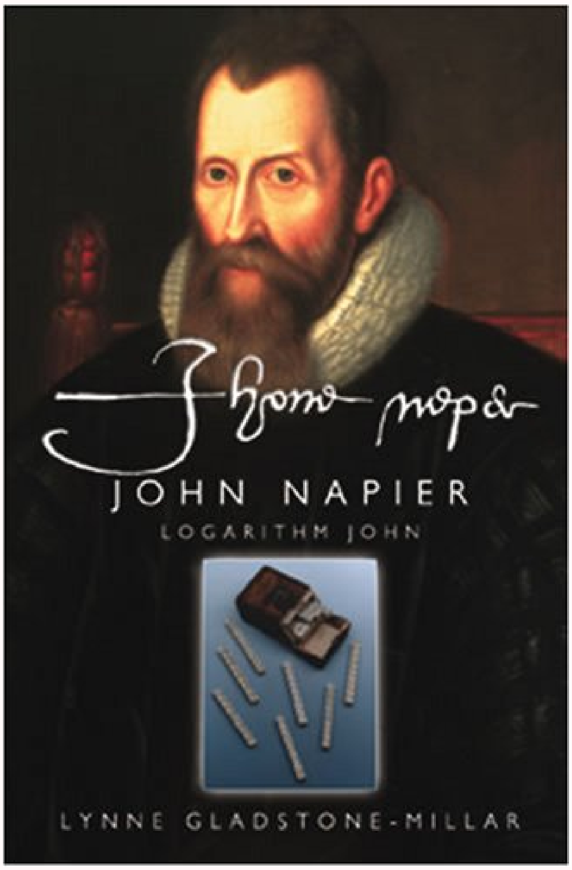
Une année de mathématiques en T^{ale}S

Notre Dame
LYCÉES Rezé

Guillaume CONNAN

THÈME Nº 10

LOGARITHME NÉPÉRIEN



Où les mathématiques rejoignent l'alchimie : guidés par la Force, nos héros transforment les produits en somme, créent de nouvelles fonctions. On touche au divin...

1 Différentes définitions

Comme souvent en mathématiques, un même objet (ici le logarithme népérien) peut être défini de différentes manières (nous en verrons trois) mais nous aboutirons malgré tout aux mêmes propriétés : le procédé de fabrication change, mais le produit fini est le même.

1 1 Cherchons des fonctions vérifiant f(a x b)=f(a)+ f(b)

Historiquement, le logarithme népérien a été pour la première fois mis en évidence par l'Écossais John Napier (en français Jean Néper..) au tout début du XVII^{e} siècle. Afin de faciliter la vie des astronomes, navigateurs, financiers de l'époque qui étaient confrontés à des calculs...astronomiques, John rechercha une fonction qui puisse transformer des produits très compliqués à calculer en sommes plus abordables. Il a donc été amené à résoudre une *équation fonctionnelle*, i.e. il a recherché les fonctions f vérifiant $f(ab) = f(a) + f(b)$ Il a pu alors établir des Tables de logarithmes, complétées au fil des ans par des potes mathématiciens (nous verrons comment ils ont pu se débrouiller en exercice). À partir de deux nombres a et b, on lit sur les Tables leurs logarithmes $\ln a$ et $\ln b$; on calcule facilement $\ln a + \ln b$ qui est égal à $\ln ab$, puis on cherche sur les Tables le nombre qui admet pour logarithme $\ln ab$ et qui est bien sûr ab.

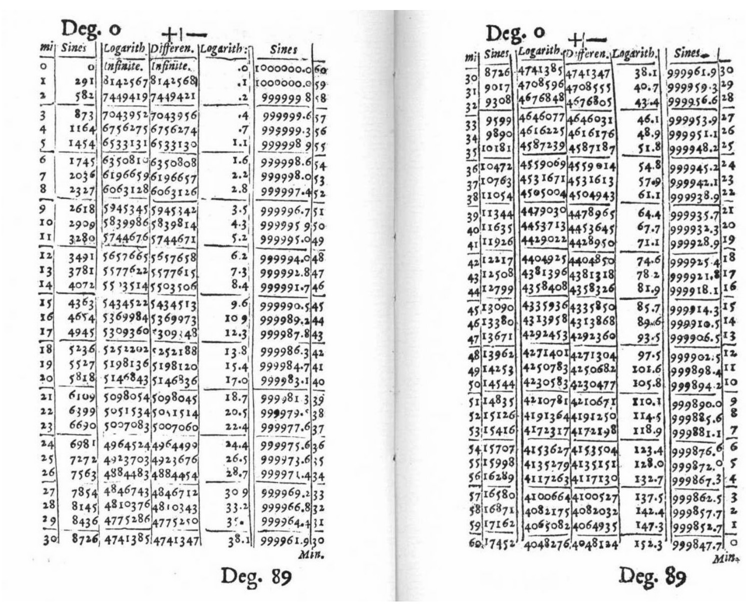
1 2 Existe-t-il des fonctions qui ont pour dérivée $x \mapsto 1/x$?

Autre problème : nous connaissons des fonctions qui ont pour dérivée x^2, x^1, x^0, x^{-2}, x^{-3}, etc. Vous avez tout de suite remarqué que nous avons oublié quelqu'un : quelles peuvent être les fonctions qui ont pour dérivée la fonction qui à x associe $x^{-1} = 1/x$? Une rapide enquête mathématique nous conduit à trouver qu'il s'agit en fait de fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle du copain John. Nous le verifierons là encore en exercice, et c'était l'approche au programme il y a une dizaine d'année.

1 3 Quelle est la réciproque de la fonction exponentielle ?

Nous avons déjà rencontré une fonction obéissant à la *loi de décomposition radioactive*, à savoir la fonction exponentielle. Mais de nouveaux problèmes se posent au moment de construire de nouvelles centrales : dans combien de milliards d'années les habitants de Tchernobyl ne risqueront plus d'attraper un cancer de la thyroïde en ingérant les légumes irradiés de leurs potagers. Les Physiciens sont alors amenés à résoudre une équation d'inconnue y du type $e^y = 32$ Quel est donc ce y dont l'exponentielle vaut 32 ? Mme Le Mer, célèbre physicienne du XXI^{e} siècle, vous a déjà donné la réponse : on l'appelle $\ln 32$.

Voici un extrait des tables de logarithmes publiées au début du XVII^{e} siècle par John Napier himself :



2 Construisons le logarithme

Mathémator : Premier problème : la fonction exponentielle admet-elle une réciproque ? Et d'abord, qu'est-ce que la réciproque d'une fonction ?

Téhessix : Si une fonction f envoie un nombre x vers un nombre y, sa réciproque f^{-1} permet de renvoyer y vers x.

Mathémator : Pouvez-vous me donner un exemple ?

Téhessix : La fonction carrée envoie 2 vers 4 et la fonction racine carrée renvoie 4 vers 2.

Mathémator : Pour reprendre votre exemple, tout nombre réel admet un et un seul carré, donc la « transformation » $x \mapsto x^2$ est bien une fonction sur $\mathbb{R}$. Mais il y a des problèmes pour revenir en arrière : certains nombres sont les carrés de deux réels comme 4, d'un seul comme 0 ou même d'aucun comme -32. On ne peut donc pas toujours définir une fonction « retour » : n'oubliez pas en effet que par définition, une fonction numérique fait correspondre à un réel de l'ensemble de définition un UNIQUE réel.
En fait, on a cherché à résoudre une équation d'inconnue x du type $x^2 = a$ qui peut admettre selon la valeur de a deux, une, voire aucune solution réelle.
Connaissez-vous un moyen de s'assurer qu'une équation du type $f(x) = a$ admet une unique solution sur un ensemble donné ?

Téhessix : Vous me prenez pour un rigolo : le théorème de LA valeur intermédiaire bien sûr !

Mathémator : J'ai du mal à réaliser à quel point la Force est en vous. Vous allez donc pouvoir relier tout ceci à la fonction exponentielle.

Téhessix : La fonction exponentielle est *continue* et *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$.
Donc, pour tout réel a *strictement positif*, l'équation $\exp(x) = a$ admet une unique solution réelle.

Mathémator : Si je résume, à tout réel *strictement positif* x on peut associer un unique réel y tel que $x = \exp(y)$. On notera ce réel $\ln x$ (logarithme népérien de x) et nous pouvons maintenant énoncer :

Théorème 10 - 1

définition du logarithme népérien
La fonction exponentielle admet une fonction réciproque défine sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ appelée fonction logarithme népérien. On note $\ln x$ l'image d'un réel strictement positif par cette fonction. Alors,

$$\text{pour tout } x > 0,\ \ e^{\ln x} = x \quad \text{et} \quad \text{pour tout réel } x,\ \ \ln e^x = x$$

Mathémator : Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, nous admettrons cette année que sa réciproque est dérivable. Donc ln est dérivable sur $]0, +\infty[$. Notons provisoirement $\ln'$ sa dérivée. Nous savons juste que $\exp(\ln x) = x$. Essayez d'en déduire une expression de $\ln' x$.

Téhessix : Pour obtenir $\ln'$, il faudrait dériver quelque chose. Or nous n'avons qu'une relation à nous mettre sous la dent, donc je vais dériver chaque membre de l'égalité $\exp(\ln x) = x$.
J'obtiens $\ln' x \exp(\ln x) = 1$ et donc $\ln' x = 1/x$...Bingo ! Le lien est fait : ln est la fonction qui a pour dérivée la fonction inverse.

Mathémator : Pas si vite mon petit Téhessix. Nous savons que plusieurs fonctions peuvent avoir la même dérivée. Nous allons considérer LA fonction de dérivée la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ *qui s'annule en 1*. Pouvez-vous me confirmer que $\ln 1 = 0$?

Téhessix : Sur la machine oui, mais je ne vois pas comment calculer une valeur particulière d'une fonction dont on ne connait rien.

Mathémator : Ou plutôt pas grand chose, mais c'est suffisant. Utilisez la seule relation que vous connaissiez en introduisant 1.

Téhessix : Si vous le dîtes. Alors $\exp(\ln 1) = 1$...

Mathémator : Donc $\exp(\ln 1) = \exp(0)$, or la fonction exponentielle est une bijection car elle est continue et strictement croissante.

Téhessix : Bijection, qu'est-ce que ça veut dire ?

Mathémator : Ça veut dire en particulier que $f(x) = f(y) \Longleftrightarrow x = y$, donc ici

$$\exp(\ln 1) = \exp(0) \Longleftrightarrow \ln 1 = 0$$

Propriété 10 - 1

sens de variation
La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\ln'(x) = 1/x$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
On en déduit que la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Mathémator : Compte-tenu du lien entre exponentielle et logarithme, essayez de démontrer la propriété suivante :

Propriété 10 - 2

relation fondamentale
Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$, on a

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

De plus

$$\ln 1 = 0$$

Mathémator : Cette dernière propriété va vous permettre, pendant vos temps libres, de mettre en évidence quelques autres résultats bien pratiques :

Propriété 10 - 3

propriétés algébriques

$$\ln(1/a) = -\ln a \qquad \ln(a/b) = \ln a - \ln b \qquad \ln a^p = p \ln a \quad \text{avec } p \in \mathbb{Q}$$

Occupons-nous maintenant des propriétés analytiques du logarithme, en particulier, allons voir ce qui se passe à l'infini.

Mais nous avons beaucoup réfléchi, alors je vous propose un petit jeu sous forme d'énigme pour nous détendre : un cloporte se promène sur le graphe de la fonction ln tracé dans un repère orthonormé d'unité le centimètre. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une hauteur de 30 cm sachant que sa vitesse est de $1 \mathrm{cm.s}^{-1}$?

Téhessix (à part) : *Voilà un gars qui sait s'amuser ! **tout haut** : euh...quel jeu distrayant, maître ! Voyons, le problème revient à résoudre l'équation $\ln x = 30$, c'est à dire $x = e^{30}$, ce qui donne environ 107 millions de kilomètres. Il lui faudra donc à peu près 3386 siècles sans compter ses pauses-jeu.*

Mathémator : Ah, ah, ah, cette blague me fera toujours rire.

Téhessix (à part) : *Pauvre homme...*

Mathémator : Bon, fini de rire. Vous vous rendez compte que la fonction ln n'est pas bien vaillante.

Téhessix : En fait, je l'imagine mal monter vers l'infini et au-delà.

Mathémator : Résumons-nous : nous savons que ln est strictement croissante, donc que peut-on dire de son comportement asymptotique, c'est à dire à l'infini ?

Téhessix : Vous m'avez déjà mis en garde à ce sujet : si ln est bornée, alors elle admet une limite finie, sinon elle tend vers $+\infty$. Le problème revient donc à savoir si ln est bornée sur $]0, +\infty[$.

Mathémator : Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $\ln x < A$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Cela voudrait dire que $x < e^A$ pour tout $x > 0$ ce qui est pour le moins absurde ! Il suffit de choisir $x = e^A + 32$.
Ainsi ln n'est pas bornée et donc

Propriété 10 - 4

limite à l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Occupons-nous maintenant de ce qui se passe du côté de l'autre borne de l'ensemble de définition, au voisinage de zéro. Il n'y a pratiquement rien à faire connaissant les propriétés algébriques de ln et en vous inspirant de ce que nous avions fait pour déduire la limite en $-\infty$ de exp connaissant sa limite en $+\infty$.

Téhessix : Ben si x tend vers 0, alors $1/x$ tend vers $+\infty$ et $\ln(1/x) = -\ln x$. En fait, si on remet tout dans l'ordre

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 1/x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln(1/x) = +\infty$$

Or $\ln(1/x) = -\ln x$, donc finalement

Propriété 10 - 5

limite en zéro

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

Mathémator : Très bien. Il ne reste plus qu'à régler un dernier détail : ln croît vers $+\infty$, certes, mais très, très lentement. À votre avis, que se passe-t-il au voisinage de $+\infty$ pour $\dfrac{\ln x}{x}$?

Téhessix : La fonction ln ne va pas peser grand chose face aux fonctions monômes : le rapport va sûrement tendre vers zéro.

Mathémator : Votre intuition est bonne. Il suffit en fait d'étudier la fonction $: x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$ pour conclure que

Propriétés 10 - 6

croissances comparées
D'une part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Téhessix : Vous parlez de mon intuition, mais un détail me turlupine : la dérivée de ln tend vers 0 en $+\infty$. J'aurai donc envie de dire que ln se « stabilise » à l'infini puisque sa pente tend vers zéro : elle devrait donc être majorée à linfini, pourtant nous avons montré qu'elle ne l'était pas.

Mathémator : Encore une fois, vous m'impressionez Téhessix. En effet, nous aurions tendance à penser qu'une fonction f vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ admette une asymptote horizontale. Malheureusement, les outils permettant de vous prouver que ce n'est pas toujours vrai ne sont plus au programme de Terminale, donc patience... Néanmoins, retenez que des conjectures qui paraissent évidentes peuvent s'avérer fausses lorsqu'on se trouve trop près de l'infini.

Téhessix : Après ces paroles, mon cours de philo va me paraître bien fade...

Mathémator : Une dernière petite limite avant de vous laissez affronter seul (mais je serai toujours à vos côté grâce à la Force) les épreuves, un dernier petit défi. Que pensez-vous de la limite en zéro de $\frac{\ln(x+1)}{x}$.

Téhessix : Argh, une forme indéterminée, vous ne me ménagez pas.

Mathémator : oui mais il s'agit d'une limite en une valeur finie. Laissez dériver votre pensée...

Téhessix : Nom de Zeus ! Bien sûr ! Introduisons $f : x \mapsto \ln(x+1)$ et calculons sa dérivée en 0.

Mathémator : Vous êtes décidément prêt mon jeune disciple.

Propriété 10 - 7

limite en zéro et taux de variation

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

3 Logarithmes et exponentielles d'autres bases

Définition 10 - 1

puissance réelle (exponentielles de base quelconque)
Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b \ln a}$

Définition 10 - 2

logarithme décimal
La fonction $\log \ : \ x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ définie pour $x > 0$ est appelée **fonction logarithme décimal**

EXERCICES

Exercices sur la définition des logarithmes

Recherche 10 - 1 Le problème de John

Nous allons rechercher les fonctions f telles que

- f est dérivable sur $]0, +\infty[$
- $f'(1) = 1$
- pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $f(ab) = f(a) + f(b)$

1. Calculez $f(1)$.
2. Soit $a > 0$ un réel fixé. On définit sur $]0, +\infty[$ la fonction

$$g_a \ : \ x \mapsto g_a(x) = f(ax) - f(x)$$

   Montrez que g_a est constante.
3. Montrez que g_a est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculez $g'_a(x)$.
4. Il ne vous reste plus qu'à remarquer que $g'_a(1) = af'(a) - f'(1)$ pour en déduire que f est la primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Recherche 10 - 2 Tables

En utilisant uniquement les résultats $\ln 2 \approx 0,693$ et $\ln 5 \approx 1,610$, donnez une valeur approchée de

1. $\ln 2,5$
2. $\ln 125$
3. $\ln 0,2$
4. $\ln \dfrac{250}{8}$
5. 45 sachant que vous ne savez plus vos tables de multiplications.

Croissances comparées

Recherche 10 - 3 Logarithme et puissance

Soit $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in]0, +\infty[$. On pose $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$.

1. **i.** En posant $X = x^\alpha$, montrez que $f(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{\ln X}{X}$.

   ii. Déduisez-en que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.
2. Soit $g(x) = x^\alpha \ln x$

   i. En posant $X = 1/x$, exprimez $g(x)$ en fonction de X et α.

   ii. Qu'en déduisez-vous d'intéressant ?

Recherche 10 - 4 Exponentielle et puissance

On pose $(x) = e^x / x^\alpha$.

1. **i.** Montrez que $(x) = e^{x\left(1 - \alpha \frac{\ln x}{x}\right)}$

   ii. Déduisez-en $\lim\limits_{x \to +\infty} (x)$
2. On pose $\psi(x) = x^\alpha e^{-x}$

   i. Démontrez que $\psi(x) = e^{-x\left(1 - \alpha \frac{\ln x}{x}\right)}$

   ii. Qu'en déduisez-vous d'intéressant ?

Puissance réelle d'un réel

Recherche 10 - 5 Fonction puissance

Étudiez les fonctions $f_\alpha \ : \ x \mapsto x^\alpha$

Recherche 10 - 6 Exponentielle de base 2

Étudiez la fonction $\ : \ x \mapsto 2^x$.

Recherche 10 - 7 Calcul de limite

Soient α et β deux réels. Étudiez $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\alpha}{1+n^\beta}$.

Discutez selon le signe de β, puis selon celui de α

Divers

Recherche 10 - 8 Nombre de chiffres d'un nombre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n est $1 + E(\log n)$ où log représente le logarithme décimal et $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

Encadrez n par deux puissances successives de 10

Recherche 10 - 9 Équation

Résolvez dans $]0, +\infty[$ l'équation $\ x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Recherche 10 - 10 Variations sans dériver

Étudiez et représentez graphiquement la fonction $x \mapsto \ln\bigl(\ln^2(x^2)\bigr)$.
Vous éviterez un gros calcul de dérivée.

Recherche 10 - 11 Dérivées pathologiques

Calculez les dérivées des fonctions définies par

1. $a(x) = \ln(\ln x)$
2. $b(x) = \ln(\ln(\ln(\ln x)))$
3. $c(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Recherche 10 - 12 Limites en l'infini

Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ de

1. $f_1(x) = x^{1/x}$
2. $f_2(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
3. $f_3(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$
4. $f_4(x) = \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

Pour b) posez t1/x ; pour c), décomposez l'exposant de e à l'aide d'expressions du type $\ln t/t$

Recherche 10 - 13 Limites en 0

Étudier les limites quand x tend vers 0^+ de

a) $g_1(x) = x^x$ b) $g_2(x) = (x^x)^x$ c) $g_3(x) = x^{(x^x)}$

d) $g_4(x) = (-\ln x)^x$ e) $g_5(x) = x^2 e^{1/x}$.

d) posez $t = -\ln x$; e) t1/x

Recherche 10 - 14 Ln et racines

On pose $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

1. Déterminez l'ensemble de définition de f et étudiez sa parité.
2. Calculez $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \ln x$
3. Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative dans un bon repère.

Recherche 10 - 15 Prolongement par continuité

Soit $\ :\ u \mapsto u \ln u$. Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ? La fonction $\tilde{}$ ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ? Étudiez $\tilde{}$ et tracez sa représentation graphique.

Recherche 10 - 16 Limite en 1

Calculez $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x^2/2 + 1/2)}{x-1}$

Recherche 10 - 17 Un petit préambule : logarithme décimal

Étudiez brièvement cette fonction et mettez en évidence ses principales propriétés algébriques.

On considère un repère où l'axe des abscisses est gradué comme d'habitude et où l'axe des ordonnées est gradué en échelle logarithmique, c'est à dire qu'une unité étant choisie, la $k -$ ième unité correspond à une ordonnée de 10^k.
Représentez dans un tel repère les fonctions suivantes :

1. $f_1 \ :\ x \mapsto 10^x$
2. $f_2 \ :\ x \mapsto 3210^x$
3. $f_3 \ :\ x \mapsto 0,3210^x$
4. $f_4 \ :\ x \mapsto e^x$
5. $f_5 \ :\ x \mapsto e^{-32x}$

Recherche 10 - 18 Décibels

Définition

Si G est une grandeur et G' une nouvelle grandeur, les nombres $G' - G$ ou G'/G ou $G' - G/G$ peuvent être trop grands ou trop petits pour être interprétés. On utilise alors une échelle logarithmique (de base 10). En supposant G et G' strictement positifs, on calcule ainsi $\log_{10} \frac{G'}{G}$ et le résultat est exprimé en **Bel**. On utilise plus couramment $10 \log_{10} \frac{G'}{G}$ qui est exprimé en **décibel** si G et G' sont des grandeurs utilisées en acoustique, électronique, télécommunications (Bel vient de Graham Bell, l'inventeur du téléphone).
Si $\log_{10} \frac{G'}{G}$ est positif, on parle de gain et sinon d'atténuation ou de perte.

Attention aux vendeurs de lave-vaisselle ou d'aéroports !

Soit P_0 la puissance fournie à l'entrée d'un appareillage et P_1 la puissance de sortie.

1. On vous dit que l'atténuation de la puissance est de 3 dB. Que peut-on en déduire pour P_1/P_0 ?
2. Que dire du gain en décibels si $P_1/P_0 = 10 ? = 100 ? = 200$?

Recherche 10 - 19 Un peu de chimie : pH et pKA

Dans l'eau de Javel, il y a de l'acide hypochloreux $HC\ell O$ associé à sa base, l'ion hypochlorite $C\ell O^-$: je ne vous apprends rien. Je vous rappelle, mais vous connaissez ça par cœur que pH et pK_A sont liés par la relation

$$pH = pK_A + \log_{10} \frac{[\text{Base}]}{[\text{Acide}]}$$

Étudiez la fonction α qui au pH associe le rapport $\dfrac{[\text{Base}]}{[\text{Acide}]}$ ainsi que la fonction β qui au pH associe le rapport $\dfrac{[\text{Acide}]}{[\text{Base}]}$ sachant que le pK_A de notre couple vaut 7,3.
Tracez les représentations de ces deux fonctions sur un même graphique et interprétez chimiquement.

Licence Creative Commons

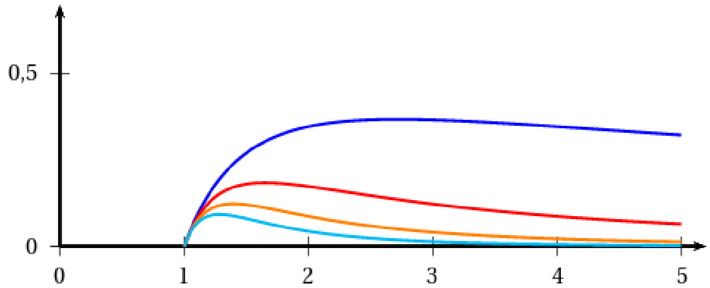
Bac

Recherche 10 - 20

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1\,;5$J par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

. Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal. Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,; 5]$:

$$f'_n(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

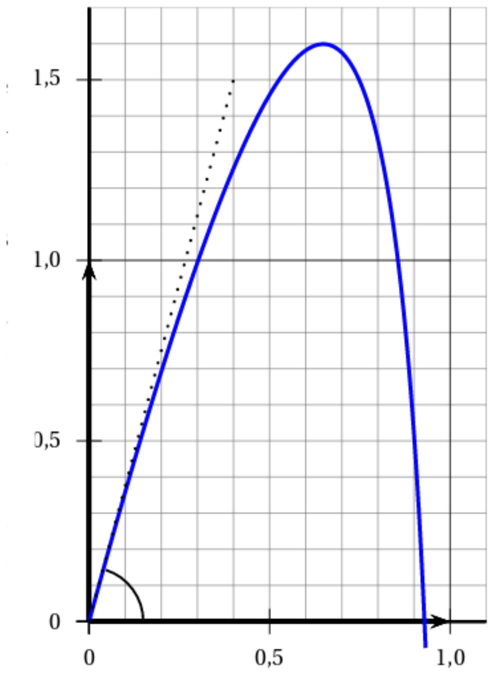
2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\,; 5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{e}\ln(x).$$

3. Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,; 5]$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

Recherche 10 - 21



Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,; 1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,; 1[$. On note f' sa fonction dérivée.
On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,; 1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,; 1[$:

$$f'(x) = \frac{-bx + b - 2}{1 - x}.$$

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1, 6 mètre.

3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.
L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

Recherche 10 - 22 Vrai ou Faux ?

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln(6x - 2) + \ln(2x - 1) = \ln(x).$$

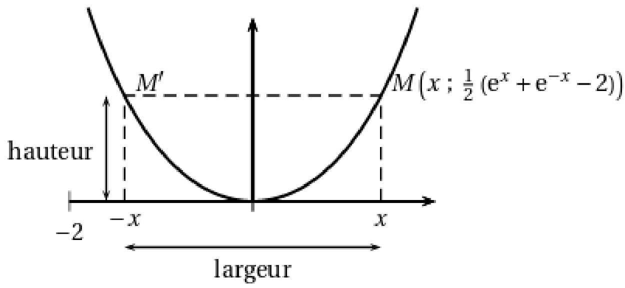
L'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

Recherche 10 - 23

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 2\right).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».
On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.
On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$(E) : e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2.$$

i. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$.

ii. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. **i.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

ii. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$.

iii. En posant $X = e^x$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0		$\ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

i. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

ii. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.

5. On considère l'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

```
Tant que b − a > 0,1 faire :
    m ← (a + b)/2
    Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
        b ← m
    Sinon :
        a ← m
    Fin Si
Fin Tant que
```

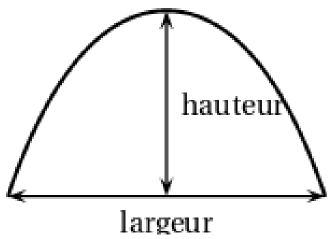
i. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.
Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

ii. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5			
...	...	...	

unit=1cm,arrowsize=2pt 3

6. La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre.
Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$(E') : e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch*.