Mathématiques

T^ale^S3 / 2018-2019

Licence Creative Commons
Mis à jour le 17 novembre 2018 à 17:33

Une année de mathématiques en T^ale^S

Guillaume CONNAN

THÈME No 3

EXPONENTIELLE

1 Le programme

- ROC : savoir démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. *La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction* f *dérivable dur* $\mathbb{R}$ *telle que* $f' = f$ *et* $f(0) = 1$. *L'existence est admise.*
- ROC : savoir démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$> *On étudie des exemples de fonctions de la forme* $x \mapsto \exp(ux)$
- Savoir utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.
- Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. *On fait le lien etre le nombre dérivé en 0 et la limite en 0 de* $\frac{\exp(x)-1}{x}$
- Connaître et exploiter $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\exp(x) = 0$.

2 Souvenirs de 1ère

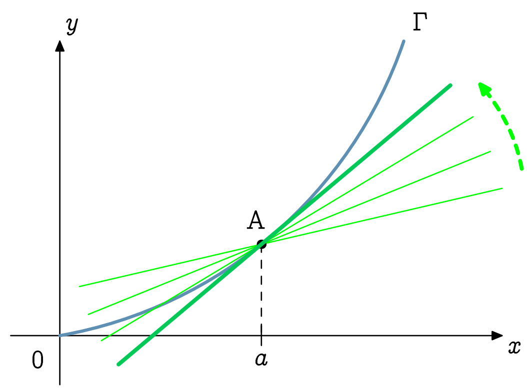
2 1 La touchante

Mathémator : Le problème de la tangente intriguait les mathématiciens du XVIIe . Fermat avait résolu le problème de la « touchante » sur un cas particulier, de manière algébrique et au prix de pas mal de ce qui nous apparaît comme des tours de passe passe (je divise par h et ensuite je suppose que $h = 0$ mais ce genre de magouilles hante les traités actuels de mathématiques financières...). Leibniz a eu le mérite d'introduire des notations et des formulations claires.

Téhessix : Mais qu'est-ce qu'une tangente ? On l'avait définie l'année dernière à l'aide des dérivées.

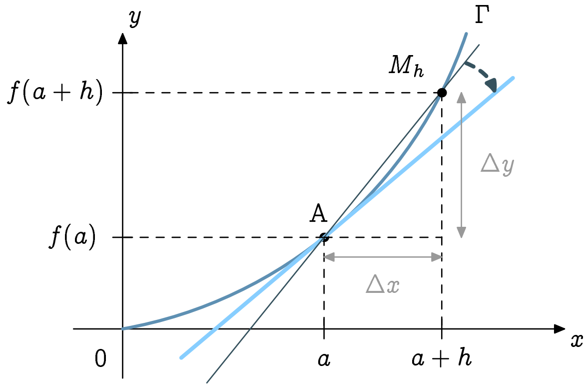
Mathémator : Une tangente, ou une « touchante » comme disait Fermat, était définie au XVIIe comme une « droite limite » qui ne « toucherait » la courbe localement qu'en un seul point[a].

Téhessix : Je me souviens : on fait tourner des droites autour d'un point



Mathémator : Voilà, mais il faut être un peu plus précis pour comprendre l'intuition de Leibniz (et d'autres)

a. Aujourd'hui, la notion de tangente n'est plus uniquement liée à une droite, mais se définit à partir d'une limite



La pente de la droite (AM_h) vaut

$$p_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{M_h} - y_A}{x_{M_h} - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

L'idée est alors que plus h sera petit, plus la droite (AM_h) se rapprochera de la tangente, et plus p_h se rapprochera de la pente de la tangente.
Pour nous, grands mathématiciens du XXIe siècle, il suffit donc de faire tendre h vers 0 et de prendre la limite de p_h, si elle existe.

$$p = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2 2 Qu'est-ce que la dérivée d'une fonction en un point ?

Mathémator : Les deux problèmes que nous venons de voir, ceux de la vitesse instantanée et de la tangente, vous ont convaincu, j'espère, de l'importance fondamentale en mathématiques et en physique de la limite du taux d'accroissement d'une fonction. Il fallait absolument lui donner un nom et rendre la notion rigoureuse car nous avions été bloqués au moment d'étudier les dérivées intuitivement dans le chapitre 2.

Définition 3 - 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit a un élément I.
On dit que **f est dérivable en a** lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Cette limite est alors appelée **dérivée de f en a**, et est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

ou encore

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ainsi, la vitesse instantanée $V(t)$ n'est autre que $x'(t)$, la dérivée en t de la fonction position x. Et la pente de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse a est égale à $f'(a)$, la dérivée de f en a.

Aparté

D'où vient la notation $\dfrac{dy}{dx}$?
En physique, vous employez plus volontiers la notation $\dfrac{dy}{dx}$ alors qu'en mathématiques, nous privilégions la notation $y'(x)$.
D'une part, l'une est due à Leibniz, l'autre à Lagrange. D'autre part, la première est liée à la figure précédente : la pente de la tangente ressemble à $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quand ces grandeurs deviennent infiniment petites. Devenu infiniment petit, le Δ devient d et la pente devient donc dy/dx. C'est une vision intuitive, qui « marche » pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais trop restrictive pour le mathématicien qui est amené à travailler avec des fonctions vectorielles dans des espaces de dimension quelconque (!). Pour le mathématicien, dy est alors une fonction de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des fonctions linéaires de l'ensemble de départ dans l'ensemble d'arrivée, et le dy du physicien sera plutôt $dy_x(h)$, if you see what I mean...

2 3 Comment calculer la dérivée d'une fonction en a ?

Téhessix : Ben vous venez de le dire, avec un calcul de limite.

Mathémator : Ah bé dame, c'est sûr. Y a plus qu'à s'y mettre. Considérez la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Calculez $f'(a)$ pour tout réel a.

Téhessix : Et bien

$$p_h = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

En développant $(a+h)^2$, on a

$$p_h = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

et on en déduit que la dérivée de f existe pour tout réel a et vaut

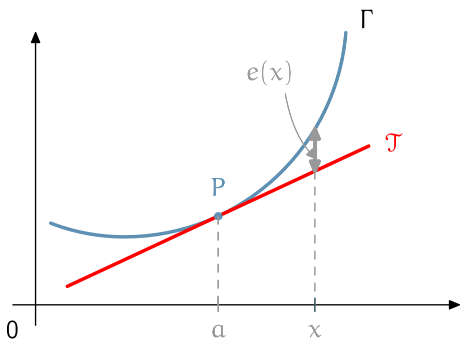
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} p_h = 2a$$

Incroyable ! On retrouve la formule.

Mathémator : On peut même s'occuper de la fonction inverse, de la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une composée : je vous laisse vous en occuper à titre d'exercice...

2 4 L'idée fondamentale du calcul différentiel : l'approximation locale des fonctions par des fonctions affines

Mathémator : À l'aide du dessin ci-dessous, essayons d'estimer l'erreur faite en remplaçant Γ par $\mathscr{T}$ localement au voisinage de a



Pour un x donné, l'erreur vaut

$$e(x) = f(x) - \big(f(a) + (x-a)f'(a)\big)$$

puisque vous connaissez une équation de la tangente $\mathscr{T}$.

Maintenant, abordons une notion que Leibniz n'avait pas su rigoureusement traiter. On « sent » que plus x va se rapprocher de a, plus $e(x)$ sera « petit », mais comment définir ce terme ? Vous vous doutez qu'une fourmi est « petite » par rapport au système solaire mais « grande » par rapport à un quark, donc la notion de $e(x)$ devient petit ne peut nous satisfaire. Alors observons.

En ré-écrivant la relation, on obtient

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{\text{constante}} + \underbrace{(x-a)f'(a)}_{\text{de l'ordre de } x-a} + e(x)$$

Il faudrait donc connaître l'ordre de $e(x)$ par rapport à $(x-a)$. Pour cela on étudie leur rapport

$$\lim_{x \to a} \frac{e(x)}{(x-a)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0$$

d'après la définition de $f'(a)$ puisqu'on suppose que f est dérivable en a. Donc l'erreur $e(x)$ est « petite » ou « négligeable » devant $x-a$. On peut alors écrire

Propriété 3 - 1

Approximation locale d'une courbe par sa tangente
Au voisinage de d'un nombre a où f est dérivable,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)e(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to a} e(x) = 0$$

On pourra retenir une formulation mnémotechnique mais peu rigoureuse

$$f(x) \underset{a}{\approx} f(a) + (x-a)f'(a)$$

On peut donc localement approcher une fonction dérivable par une fonction affine, ce qui peut pas mal nous simplifier la vie pour étudier son comportement ou la modéliser.

Considérons par exemple la fonction $f\colon \begin{array}{ccc} [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$ et étudions la au voisinage de 0. On obtient facilement $f(0)=1$ et $f'(0)=1/2$, donc

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + xe(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} e(x) = 0$$

Vérifions par le calcul

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+1/1000} & \approx & 1,000499875 \\ 1+1/2000 & = & 1,0005 \end{array}$$

Donc l'erreur commise est de l'ordre de $1,251010^{-7}$, c'est à dire vraiment négligeable devant x qui vaut 10^{-3}.
Cette propriété inspira Euler qui s'en servi pour obtenir un tracé approximatif de solutions d'équations différentielles comme nous allons le voir tout de suite.

3 À la recherche d'une fonction proportionnelle à sa dérivée

3 1 Enquête

On a retrouvé le corps de la pauvre Laura Palmer à 6 heures du matin. Le médecin a relevé une température du corps de 30 °C. Quinze minutes plus tard, la température était tombée à 29.5 °C. La température extérieure est restée stable toute la nuit et égale à 0 °C.
À quelle heure a eu lieu le crime ?

Une loi physique a été établie par Newton, encore lui, au sujet du refroidissement des corps inertes, qu'il s'agisse d'un morceau de fromage ou d'une jeune américaine assassinée :

> *La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant*

Si on appelle $\theta(t)$ la température du corps à l'instant t, la vitesse de refroidissement s'exprime donc comme la limite du taux d'accroissement entre deux instants « très proches » :

$$v_f(t) = \lim_{dt\to 0} \frac{\theta(t+dt)-\theta(t)}{dt} = \theta'(t)$$

Or cette vitesse est proportionnelle à l'écart avec la température ambiante, ici 0. Il existe donc une constante de proportionnalité k telle que :

$$\theta'(t) = k \cdot \theta(t)$$

On dit que θ est une solution de *l'équation différentielle* $f' = k \cdot f$, une équation dont l'inconnue est une fonction et qui relie cette fonction à sa dérivée.
L'équation différentielle $f' = kf$ se retrouve dans de nombreux problèmes : désintégration des noyaux des atomes d'un corps radioactif, datation au carbone 14, évolution d'une population où la croissance est proportionnelle au nombre d'habitants, etc. Le problème est de trouver une fonction la satisfaisant.
Par exemple, certains phénomènes en mécanique conduisent à étudier l'équation différentielle $f'' = -f$. Nous connaissons au moins deux fonctions la satisfaisant : cosinus et sinus.
Le problème avec $f' = kf$, c'est que nous ne connaissons aucune fonction solution.

3 2 Construction approchée du graphe d'une solution par la méthode d'Euler

Nous allons simplifier le problème : soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = f(x)$.

1. Soit h un réel voisin de zéro. Montrez que, pour tout réel a, l'approximation affine donnée par le calcul des dérivées s'écrit

$$f(a+h) \approx (1+h)f(a)$$

2. On prend $h = 0,001$. On note (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + h$. Donnez une approximation de $f(a_{n+1})$ en fonction de $f(a_n)$.
   Déduisez-en que la suite des approximations de $f(a_n)$ est une suite géométrique que vous caractériserez.
3. Faîtes de même avec $h = -0,001$.
4. Montrez que $f(1) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et calculez la valeur approchée correspondante de $f(1)$ pour $n = 10\,000$.
5. On en déduit que l'algorithme suivant devrait nous permettre de tracer une représentation graphique de notre fonction mystérieuse :

```
Algorithme d'Euler pour tracer la solution de f'=f avec f(0)=1
Variable
    x, y, h : réels
Début
    x ← 0
    y ← 1
    h ← 0,000001
    TantQue x < 2 Faire
        x ← x + h
        y ← .....
        Placer le point (x,y)
    FinTantQue
Fin
```

   Complétez la ligne incomplète.
6. Que se passe-t-il sii $h = 0$? $h = 2$?
7. Expliquez pourquoi, avec $h \in]0,2]$ il est certain que l'algorithme terminera.
8. Quelle partie de la courbe obtient-on ? Comment faire pour avoir la partie de la courbe correspondant aux abscisses entre -2 et 0 ?

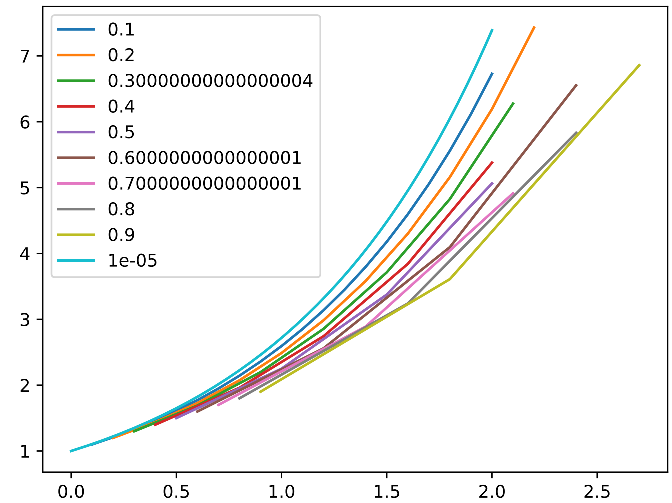
Avec Python, on peut tracer une courbe avec la fonction `plot` en donnat comme argument la liste des abscisses et la liste des ordonnées des points. Cela donne ici :

```python
def euler(h, x0, y0, xmax):
    x, y = x0, y0
    X, Y = [], []
    while x < xmax:
```

```
        x += h
        y *= (1 + h)
        X.append(x)
        Y.append(y)
    plt.plot(X,Y, label=str(h))
```

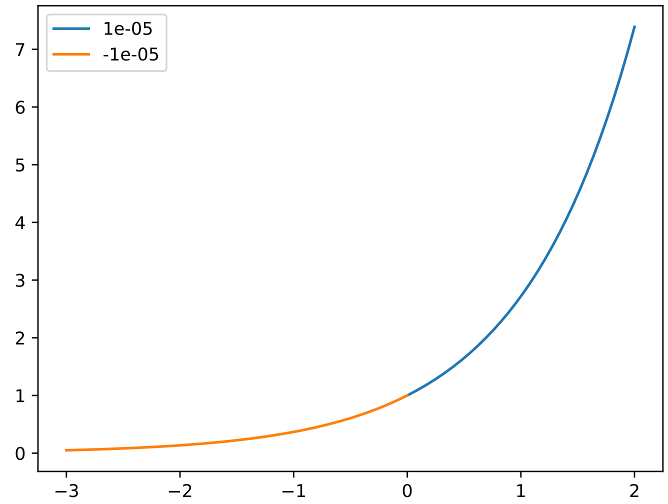
On peut observer d'abord l'influence de h :

```
for p in range(1,20):
    euler(0.1*p,0,1,2)

euler(1e-5,0,1,2)
plt.legend()
plt.show()
```



En modifiant un peu les conditions on peut avoir un tracé sur $[-3, 2]$ par exemple :

```
def euler(h, x0, y0, xmax):
    x, y = x0, y0
    X, Y = [], []
    while x < xmax if h > 0 else x > xmax :
        x += h
        y *= (1 + h)
        X.append(x)
        Y.append(y)
    plt.plot(X,Y, label=str(h))

euler(1e-5,0,1,2)
euler(-1e-5,0,1,-3)
```



Avec la Casio...

Il y a au moins deux possibilités pour illustrer notre construction sur l'écran d'une Casio :

En traitant une suite comme une fonction habituelle On veut par exemple tracer les 201 premiers termes de la suite des $f(a_n) = (1+h)^n$ pour $h = 0.01$. Le maximum en ordonnée sera $f(a_{200}) = 1,01^{200} \approx 7,3$.

On va sur le menu GRAPH. On rentre Y= 1 · 0 1 ^ X,θ,T EXE

On tape ensuite sur DRAW.

On peut régler la fenêtre avec SHIFT V-WIN puis

- ▶ Xmin : 0
- ▶ Xmax : 200
- ▶ Ymin : 0
- ▶ Ymax : 8

En utilisant le mode Récursion On va sur RECUR

On tape an+1= 1 · 0 1 an

On va ensuite sur SET et on règle :

- ▶ Start : 0
- ▶ End : 200
- ▶ ao : 1

Enfin on sélectionne TABL puis G·PLT.

Attention ! Le niveau de récursion est limité sur les Casio. Si vous prenez $h = 1/1000$ par exemple, vous obtiendrez une erreur.

3 3 Analyse : étude des propriétés mathématiques d'une solution

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = k\,f(x)$, avec $k \neq 0$.

1. Montrez que $f'(0) = k$.

2. Soit y un réel fixé et g la fonction définie par

$$g_y(x) = f(x+y)f(-x)$$

i. Montrez que g_y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez $g'_y(x)$.

ii. Calculez $g_y(0)$ et déduisez-en que pour tous x et y réels,

$$f(x+y)\,f(-x) = f(y) \qquad (1)$$

3. Montrez alors successivement que :

i. pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1$

ii. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

iii. pour tous réels x et y

$$f(x+y) = f(x)\,f(y)$$

3 4 Unicité de la fonction solution

Peut-on trouver une autre fonction, φ, distincte de f, et vérifiant les mêmes propriétés que f, à savoir : φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\varphi(0) = 1$ et, pour tout x, $\varphi'(x) = k\,\varphi(x)$, avec $k \neq 0$?

Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut définir la fonction $\psi = \varphi/f$.
Vérifiez que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculez sa dérivée. Que peut-on en déduire pour ψ ?
Montrez alors que $f = \varphi$.

3 5 Synthèse

Nous avons cherché des solutions au problème

f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = k\,f(x)$, avec $k \neq 0$.

Nous avons montré que, *si une telle fonction existe*, alors elle est unique et elle vérifie nécessairement la relation

$$f(x+y) = f(x)\,f(y) \qquad (2)$$

Il reste à vérifier que, réciproquement, une fonction dérivable, non nulle, vérifiant la relation (2) est nécessairement telle que $f(0) = 1$ et vérifie pour tout réel x $f'(x) = kf(x)$, avec k un réel non nul.

Cette vérification n'est pas anodine et conclut notre raisonnement d'*analyse-synthèse*.

1. Montrez que f ne s'annule pas et que f est à valeurs strictement positives.
2. Montrez que, comme f n'est pas la fonction nulle, alors $f(0) = 1$ en utilisant la relation (2).
3. Soit a un réel fixé. On définit la fonction $\varphi : x \mapsto f(x+a)$ et la fonction $\psi : x \mapsto f(x)f(a)$.
   Montrez que $f'(x+a) = f(a)f'(x)$, puis que, pour tout réel a, $f'(a) = k\,f(a)$, où k est un réel que vous déterminerez.

4 Les résultats essentiels du cours

4 1 Théorème et définition

Grâce à nos recherches précédentes, nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 3 - 1

existence et unicité de la fonction exponentielle
Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On la nomme **fonction exponentielle** et on la note **exp**.
L'exponentielle est à valeurs strictement positives et vérifie la relation

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Démonstration ?

Pour le Bac, il faut être uniquement capable de démontrer l'unicité d'une telle fonction. Comment faire ?
On peut raisonner par l'absurde et supposer l'existence de deux fonctions f et φ vérifiant les mêmes propriétés puis introduire $\psi = \varphi/f$ mais pour cela il faudrait être sûr que f ne s'annule jamais et recommencer tout ce quenous avons fait dans la section précédente.

Résultat préliminaire

Bon, en fait, pour le Bac, nous allons utiliser un nouveau théorème que nous admettrons et qui sera utile aujourd'hui ettout au long de l'année :

Théorème 3 - 2

Dérivée d'une composée de fonctions
Si g est dérivable en x et f dérivable en $g(x$ alors la fonction composée $f \circ g$ est dérivable en x et :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

On dérive comme si $g(x)$ était une variable et on multiplie par la dérivée de « l'intérieur »

Par exemple, prenons la fonction $h : x \mapsto f(ax+b)$. Si on note $g : x \mapsto ax+b$ alors $h = f \circ g$. Or $g'(x) = a$ donc $h'(x) = f'(ax+b)a$

Théorème 3 - 3

Dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$
Si f est dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$ alors la fonction composée $h : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h'(x) = af'(ax+b)$$

Ainsi la dérivée de $f(-x)$ est $-f'(-x)$.

La démonstration pour le Bac

On raisonne par l'absurde et on suppose l'existence de deux fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f = f'$, $g = g'$, $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$.
Introduisons la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = f(x) \cdot g(-x)$.
Calculez la dérivée de ψ. Concluez.

4 2 Conséquences immédiates

Vous pouvez démontrer aisément que :

Propriétés 3 - 2

- $\exp(0) = 1$
- $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\exp(u) = u' \cdot \exp(u)$
- Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$
- La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(ka) = [\exp(a)]^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\exp\left(\dfrac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)} = [\exp(a)]^{\frac{1}{n}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

4 3 La notation e^x

On pose $e = \exp(1)$. Nous avons obtenu grâce à la méthode d'Euler une approximation de e, car $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

$e \approx 2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945$

Nous avons obtenu précédemment que pour tout entier k,

$$\exp(k) = \exp(k1) = (\exp(1))^k = e^k$$

Propriété 3 - 3

notation
Nous noterons alors, **par convention**, que

$$\exp(x) = e^x$$

Vous vérifierez que les propriétés vues précédemment sont conformes à l'usage de la notation puissance.

4 4 Propriétés analytiques de l'exponentielle

▶ Prouvez que

Propriété 3 - 4

ROC
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

en étudiant la fonction $\varphi : x \mapsto e^x - x$

▶ Déduisez-en que

Propriété 3 - 5

ROC
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

▶ Comparez $e^{x/2}$ et $x/2$. Déduisez-en que

Propriété 3 - 6

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

▶ Puis que

Propriété 3 - 7

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

.

Licence Creative Commons

EXERCICES

Recherche 3 - 1

Prérequis : la fonction exponentielle, notée exp, a les trois propriétés suivantes :

1. exp est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$;
2. sa fonction dérivée, notée exp′, est telle que, pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$;
3. $\exp(0) = 1$.

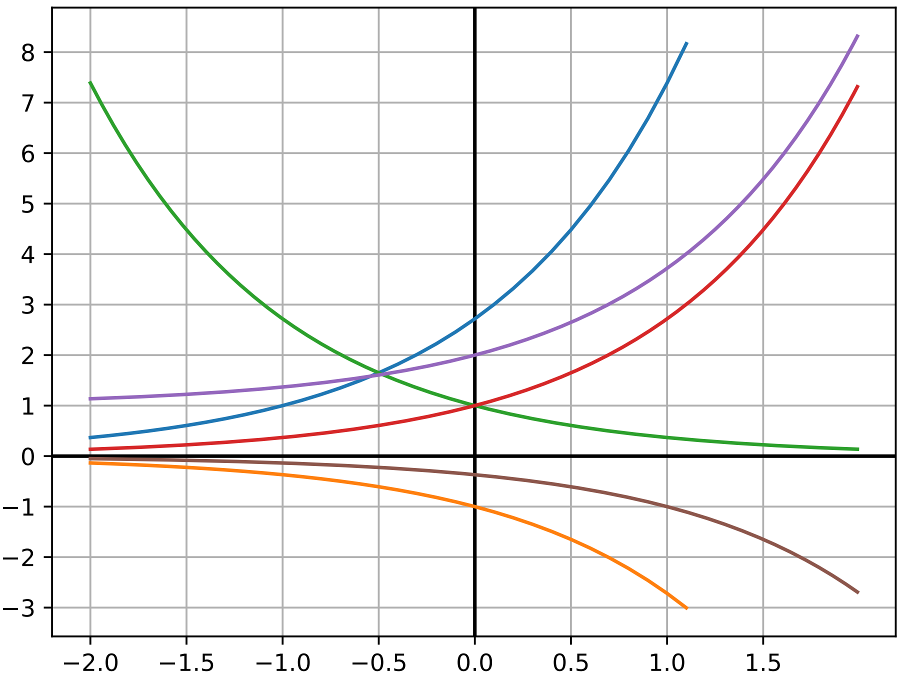
En n'utilisant que ces trois propriétés de la fonction exp, démontrer successivement que

- Pour tout nombre réel x, $\exp(x)\exp(-x) = 1$;
- pour tout nombre réel a et tout nombre réel b, $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$.

Recherche 3 - 2

Reconnaître parmi les figures ci-dessous les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{-x}$
2. $x \mapsto e^{x}$
3. $x \mapsto e^{x+1}$
4. $x \mapsto e^{x} + 1$
5. $x \mapsto -e^{x}$
6. $x \mapsto -e^{x-1}$



Recherche 3 - 3

Développez et réduisez au maximum les expressions suivantes :

1. $e^{x}e^{-x}$
2. $e^{x}e^{-x+1}$
3. ee^{-x}
4. $\left(e^{-x}\right)^2$
5. $\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}}$
6. $\dfrac{\left(e^{x}\right)^3}{e^{2x}}$
7. $e^{x}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$
8. $\left(e^{x}\right)^5\left(e^{-2x}\right)^2$
9. $e^{-3x+1}\left(e^{x}\right)^3$
10. $\sqrt{e^{-2x}}$
11. $\dfrac{e^{-4x}e}{\left(e^{-x}\right)^2}$
12. $\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2 - \left(e^{x} - e^{-x}\right)^2$
13. $\left(e^{x} - e^{-x}\right)^2 - e^{-x}\left(e^{3x} - e^{-x}\right)$
14. $\left(e^{x} - e^{-x}\right)\left(e^{2x} + e^{x} + 1\right)$

Recherche 3 - 4

Calculez et factorisez les dérivées et les limites aux bornes des ensembles de définitions des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f_1(x) = e^x + x^2 + 1$
2. $f_2(x) = 5e^x + 5xe^x$
3. $f_3(x) = e^x \sin(x)$
4. $f_4(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$
5. $f_5(x) = \dfrac{3x + 1 - e^x}{e^x}$
6. $f_6(x) = x^3 e^{-x}$
7. $f_7(x) = \dfrac{x^2 e^x}{x + 1}$
8. $f_8(x) = \dfrac{e^x}{x}$
9. $f_9(x) = \dfrac{1}{e^x}$
10. $f_{10}(x) = (e^x)^2 + \dfrac{1}{e^x}$
11. $f_{11}(x) = e^{-x}$
12. $f_{12}(x) = e^{4x+1}$
13. $f_{13}(x) = e^{\cos(x)}$
14. $f_{14}(x) = e^{5x^3+7x+4}$
15. $f_{15}(x) = (x+1)e^{-x+1}$
16. $f_{16}(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

Recherche 3 - 5

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\exp(x)$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminez les variations de la fonction g.
3. Déterminez une équationde la tangente à Γ au point d'abscisse 0.

Recherche 3 - 6

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^x$ et $g(x) = \frac{e}{2}(x^2 - 1)$.

1. Déterminez les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives de f et g avec les axes de coordonnées.
2. Montrez que les deux courbesont un point commun d'abscisse 1.
3. Démontrez que les courbes admettent une tangente commune au point d'abscisse 1 et donnez une équation de cette tangente.

Recherche 3 - 7

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{2x}$. On note Γ_f et Γ_g leurs courbes représentatives dans un RON.
Démontrez que les deux courbes ont un unique point commun que l'on déterminera.
Les tangentes auxdeux courbes en ce point sont-elles confondues ?
Étudiez les positions relatives des deux courbes.

Recherche 3 - 8

Démontrez que pour tout réel x on a $e^x \geqslant x + 1$

Recherche 3 - 9

On souhaite étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. On notera Γ sa courbe représentative.

1. En étudiant la signe du dénominateur, déterminez l'ensemble de définition de f.
2. Démontrez que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.
3. Étudiez les variations de f sur son ensemble de définition.
4. Déterminez une équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 0.
5. On souhaite dans cette question encadrer la solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ à l'aide d'un algorithme.
   i. Démontrez que résoudre $f(x) = \frac{1}{2}$ revient à résoudre $e^{2x} = 3$.

ii. Vérifiez à l'aide de la calculatrice que la solution est comprise entre 0 et 1.

iii. Faites fonctionner l'algorithme ci-dessous pour $k = 2$:

Algorithme de résolution de $f(x) = \frac{1}{2}$
Variable
  k : *entier naturel*
  a,b,m : *réels*
  Saisir k
Début
  a $\leftarrow$ 0
  b $\leftarrow$ 1
  TantQue $b - a \geqslant 10^{-k}$ **Faire**
    m $\leftarrow$ $\frac{a+b}{2}$
    Si $e^{2m} < 3$ **Alors**
      a $\leftarrow$ m
    Sinon
      b $\leftarrow$ m
    FinSi
  FinTantQue
  Afficher a et b
Fin

iv. Déduisez-en unencadrement de la solution d'amplitude strictement inférieureà 10^{-2}.

Recherche 3 - 10

À quelle heure a été assassinée Laura Palmer ?

L'exponentielle à travers les sciences

Recherche 3 - 11

Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T sont animées d'une vitesse de v cm.s^{-1}. Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de Maxwell-Boltzmann

$$F(v) = cv^2\, e^{-mv^2/(2kT)}$$

où T est la température (en K), m la masse d'une molécule et c et k des constantes positives.
Montrez que la valeur maximale de F a lieu en $v = \sqrt{2kT/m}$.

Recherche 3 - 12

La fonction de croissance de von Bertanlanffy donne approximativement la masse $W(t)$ (en kg) à l'âge t (en années) des éléphantes africaines. Son expression est

$$W(t) = 2600\left(1 - 0,51e^{-0,075\,t}\right)^3$$

1. Évaluez la masse et le taux de croissance d'un nouveau-né (le taux de croissance à l'instant t est évidemment $W'(t)$).
2. Calculez et interprétez $\lim\limits_{t\to+\infty} W(t)$.

Recherche 3 - 13

Un *modèle de densité urbaine* est une formule qui lie la densité de la population (en nombre de personnes par unité de surface) à la distance r (en unité de longueur) du centre ville. La formule

$$D = a\, e^{-br+cr^2}$$

où a, b et c sont des constantes positives (a est la densité au centre, b le coefficient de décroissance), convient pour certaines villes des États-Unis
Déterminez l'allure de la courbe représentative de ce modèle.

Recherche 3 - 14

En statistiques, la *distribution normale* est définie par la fonction de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \quad \text{où} \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

μ est la moyenne de cette distribution et σ^2 la variance. L'étude de cette fonction est utilisée dans des domaines qui vont de la mécanique quantique à la répartition des notes du baccalauréat. Étudiez cette fonction (sens de variation, limites) et tracez la courbe représentative de f.

Recherche 3 - 15

On considère un circuit électrique composé d'une force électromotrice U, d'une résistance R et d'une inductance L. L'intensité du courant I varie en fonction du temps t selon la formule

$$I = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

On considère que R est la seule variable indépendante, i.e. U, L et t sont considérés comme des constantes et R comme une variable. Calculez $\lim\limits_{\substack{R\to 0\\ R>0}} I$.

Recherche 3 - 16

Dans la forêt syldave, des détritus naturels (feuilles, branches, animaux morts, cadavres d'espions, etc.) tombent sur le sol et s'y décomposent. La quantité $Q(t)$ exprimée en $g \cdot m^{-2}$ de détritus jonchant le sol varie avec le temps t. On suppose que de nouveaux détritus tombent au sol à un taux constant de $200\,g \cdot m^{-2}$ par année et que les détritus accumulés au sol se décomposent au taux de 50% de la quantité de détritus jonchant le sol.

1. On note $f(t) = Q(t) - 200$. Déterminez une équation différentielle vérifiée par f.
2. En déduire l'expression générale de $Q(t)$.
3. Exprimer $Q(t)$ sachant qu'au temps $t = 0$, on comptait $50\,g \cdot\ m^{-2}$

Recherche 3 - 17

Si vous allez vous promener dans la ville de Saint-Louis dans le Missouri aux États-Unis, vous pourrez y admirer la célèbre *Gateway Arch to the West* conçue en 1947 par l'architecte finlandais Ero Saarinen et l'ingénieur Hannskarl Bandel et dont la construction s'acheva en 1965. Cette arche a la forme d'une *chaînette* pondérée d'équation

$$y = 212 - 21\,\mathrm{ch}(0,033x)$$

où x et y sont mesurés en mètres et rend hommage aux pionniers partis à la conquête de l'Ouest.
Pouvez-vous déterminer la hauteur de l'arche et la distance entre les deux pieds ?

Recherche 3 - 18

L'équation de la hauteur h par rapport au sol d'un fil électrique suspendu entre deux poteaux s'obtient en résolvant l'*équation différentielle*

$$h''(x) = k\sqrt{1 + (h'(x))^2}$$

où k est un paramètre qui dépend de la densité et de la tension du fil et x est mesuré en mètres horizontalement à partir d'une origine située sur le sol en-dessous du point où la hauteur du fil est la plus faible.

1. Vérifiez que $h : x \mapsto \frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2k}$ satisfait cette équation différentielle.
2. Quelle est la hauteur minimale du fil si le paramètre k vaut $0,05$?
3. Quelle est la hauteur des poteaux (de même hauteur) s'ils sont distants de 30 m et que le paramètre k vaut 0,05 ?

Des exercices de Bac

Recherche 3 - 19 Bac 2017

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \qquad \text{où } b > 0.$$

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$:
$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right).$$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

Recherche 3 - 20 Bac 2017

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1}, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :

Pour tout réel positif ou nul t, $v(t) = 9,81\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Cas général

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
2. La goutte ralentit -elle au cours de sa chute ?
3. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 9,81\frac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\frac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

Partie B
Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.
À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-1}.

1. Depuis combien de temps la goutte s'est -elle détachée de son nuage ? Arrondir la réponse au dixième de seconde.
2. En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1}.

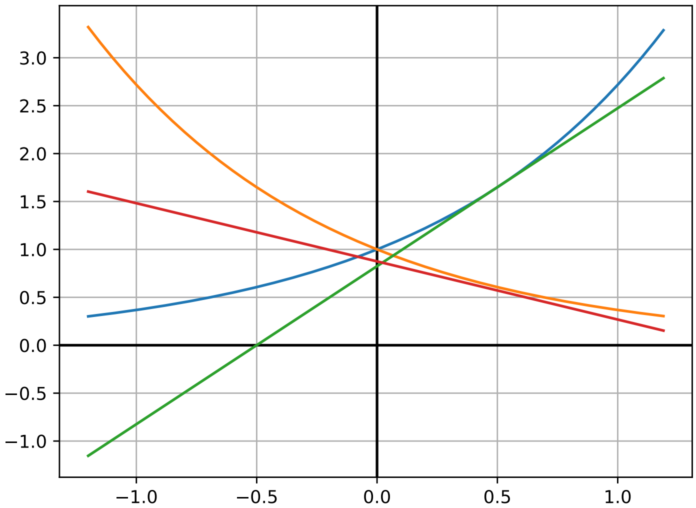
Recherche 3 - 21 Bac 2017

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = e^{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.
Pour tout réel a, on note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a.
La tangente en M à $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment [PQ] pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	$-2,5$	2
4	-2	2
5	$-1,5$	2
6	-1	2
7	$-0,5$	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathscr{C}_g$.

2. **i.** Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

ii. Démontrer cette conjecture.

Recherche 3 - 22 **Bac 2017**

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - e^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $\;f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On admet que g est strictement d'ecroissante de $[0, +\infty[$ dans $[-1, 0]$
En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de la fonction f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.
Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.
On rappelle que la fonction C est définie sur l' intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
   - **i.** Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
   - **ii.** Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromole par litre.
   Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.
2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

Recherche 3 - 23 **Bac 2018**

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1.
   - **i.** Étudier les variations de la fonction g.
   - **ii.** Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1\,;\,0]$.
3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right)e^{-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. **i.** Démontrer que, pour tout $x > 1$,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

ii. En déduire que, pour $x > 1$,

$$0 < f(x) < 4x^3e^{-2x+1}.$$

iii. On admet que, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3e^{-2x+1} = \dfrac{e}{2}(2x)^3e^{-2x}$ puis montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^3e^{-2x+1} = 0.$$

iv. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right) e^{-2x+1}$.

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.