Mathématiques

2^{ale}5 / 2018-2019

Une année de mathématiques en 2nde

Guillaume Connan

THÈME N° 8

Variations de fonctions

Juste quelques définitions concernant les variations de fonctions. Ces notions seront reprises tout au long de l'année.

1 Le programme officiel

Notions à découvrir : fonction croissante, fonction décroissante, maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.

- Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.
- Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations.
- Lorsque le sens de variation est donné, par une phrase ou un tableau de variations :
  - comparer les images de deux nombres d'un intervalle ;
  - déterminer tous les nombres dont l'image est supérieure (ou inférieure) à une image donnée.

Les élèves doivent distinguer les courbes pour lesquelles l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique.
Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année.
Même si les logiciels traceurs de courbes permettent d'obtenir rapidement la représentation graphique d'une fonction définie par une formule algébrique, il est intéressant, notamment pour les fonctions définies par morceaux, de faire écrire aux élèves un algorithme de tracé de courbe.

2 Définitions

Définition 8 - 1

fonctions croissantes et décroissantes sur un intervalle
Soit φ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite

- *croissante* si, et seulement si, quels que soient les réels t_1 et t_2 dans I vérifiant $t_1 \leqslant t_2$, leurs images par φ vérifient aussi $\varphi(t_1) \leqslant \varphi(t_2)$;
- *décroissante* si, et seulement si, quels que soient les réels t_1 et t_2 dans I vérifiant $t_1 \leqslant t_2$, leurs images par φ vérifient aussi $\varphi(t_1) \geqslant \varphi(t_2)$.

Autrement dit, une fonction croissante est une fonction qui conserve l'ordre et une fonction décroissante est une fonction qui l'inverse.
On parle de fonction *strictement croissante* si $t_1 < t_2$ implique $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$ et *strictement décroissante* si $t_1 < t_2$ implique $\varphi(t_1) > \varphi(t_2)$.
Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction croissante « monte » de la gauche vers la droite et celle d'une fonction décroissante « descend ».

Exemple

Déterminer *graphiquement* le sens de variation de la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} [0\,;\,4] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{array}$ étudiée précédemment.

Définition 8 - 2

fonction constante
Une fonction φ est *constante* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, quels que soient réels t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}$, $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.

Définition 8 - 3

fonction monotone
Une fonction est monotone sur un intervalle I si, et seulement si, elle est soit toujours croissante, soit toujours décroissante sur cet intervalle.

Définition 8 - 4

extremum local
Soit φ un fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Un réel M est un *maximum local* d'une fonction φ sur un intervalle J inclus dans I si pour tout élément t de J on a

$$\varphi(t) \leqslant M$$

C'est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe représentative de f sur l'intervalle J.
Un réel m est un *minimum local* d'une fonction φ sur un intervalle J inclus dans I si pour tout élément t de J on a

$$\varphi(t) \geqslant m$$

C'est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe représentative de φ sur l'intervalle J.

Exemple

Déterminez *graphiquement* les extrema locaux de la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} [0\,;\,4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{array}$ étudiée précédemment.

3 Tableau de variation

On représente parfois les variations d'une fonction par un tableau. La première ligne contient les valeurs importantes de la variable t, c'est à dire les bornes de l'intervalle de définition et les valeurs pour lesquelles le sens de variation change. La seconde ligne expose les variations de la fonction par des flèches et les images, si elles existent, des nombres présents dans la première ligne. En première, on y fera aussi apparaître les *limites* de la fonctions.

Par exemple, en reprenant une nouvelle fois la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} [0\,;\,4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{array}$

t	0	1	3	4
Variations de φ	10 ↗	$\frac{34}{3}$ ↘	10 ↗	$\frac{34}{3}$

Exercices

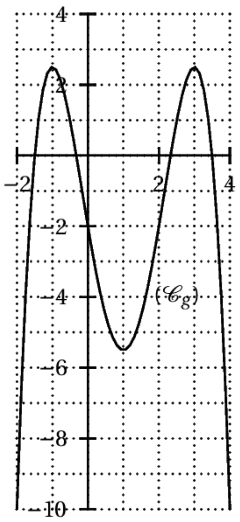
Recherche 8 - 1 Lecture d'un tableau de variation

On donne le tableau de variations suivant :

Valeurs de x	-6		-1		2		7
Variations de $f(x)$	0	$\searrow$	-6	$\nearrow$	5	$\searrow$	1

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Comparer $f(3)$ et $f(4)$.
3. Déterminer le maximum de la fonction f sur $[-6;7]$.
4. Déterminer le maximum de la fonction f sur $[-6;-1]$.
5. Combien 4 a-t-il d'antécédents ? Justifier

Recherche 8 - 2 Lecture graphique



1. Donner le tableau de variations de la fonction g dont on a donné ci-contre la courbe représentative.
2. Combien l'équation $g(x) = 0$ a-t-elle de solutions ? Justifier. On ne demande pas les valeurs des solutions.
3. Résoudre l'équation $g(x) = -2$.
4. On donne :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x - 2.$$

Calculer l'image de 3.

Recherche 8 - 3 Tableaux de signe et de variation

Voici le tableau de variations d'une fonction f :

Valeurs de x	-10		-6		-1		4
Variations de $f(x)$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5

Voici son tableau de signes :

Valeurs de x	-10		-7		-3		1		4
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Tracer une représentation graphique de cette fonction.

Recherche 8 - 4 — Conjecture trompeuse

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x^2 - x + 1.$$

1. Calculer, à l'aide de la calculatrice, les images des nombres suivants : 0 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 et 2.
2. Quelle conjecture peut-on alors faire sur la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$?
3. Calculer $f(0,4)$.
4. Que peut-on dire de la conjecture précédente ?

Recherche 8 - 5 — À partir d'un tableau de variation

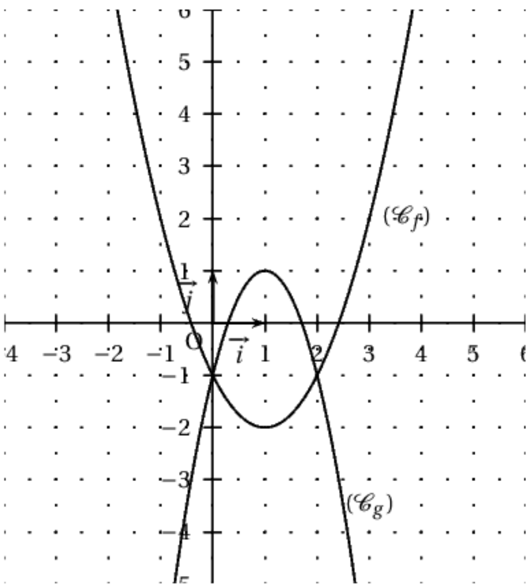
Valeurs de x	-5		-2		0		3
Variations de $f(x)$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

A l'aide du tableau de variations, indiquer si les égalités ou inégalités proposées sont vraies, fausses ou si le tableau des variations ne permet pas de conclure.

$f(-1) = 0$	
$f(-4) > f(-2)$	
$f(1) > f(2)$	
$f(-1) = 2$	
$f(-3) > 1$	
$f(-1) < f(-5)$	

Recherche 8 - 6 — Étude graphique

1. Résoudre graphiquement, en justifiant aussi précisément que possible, en donnant si besoin les valeurs approchées au dixième :
   i. l'équation $f(x) = 0$;
   ii. l'équation $f(x) = 2$;
   iii. l'équation $f(x) = g(x)$;
   iv. l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.
2. Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.



Recherche 8 - 7 — Variations des fonctions du second degré (1)

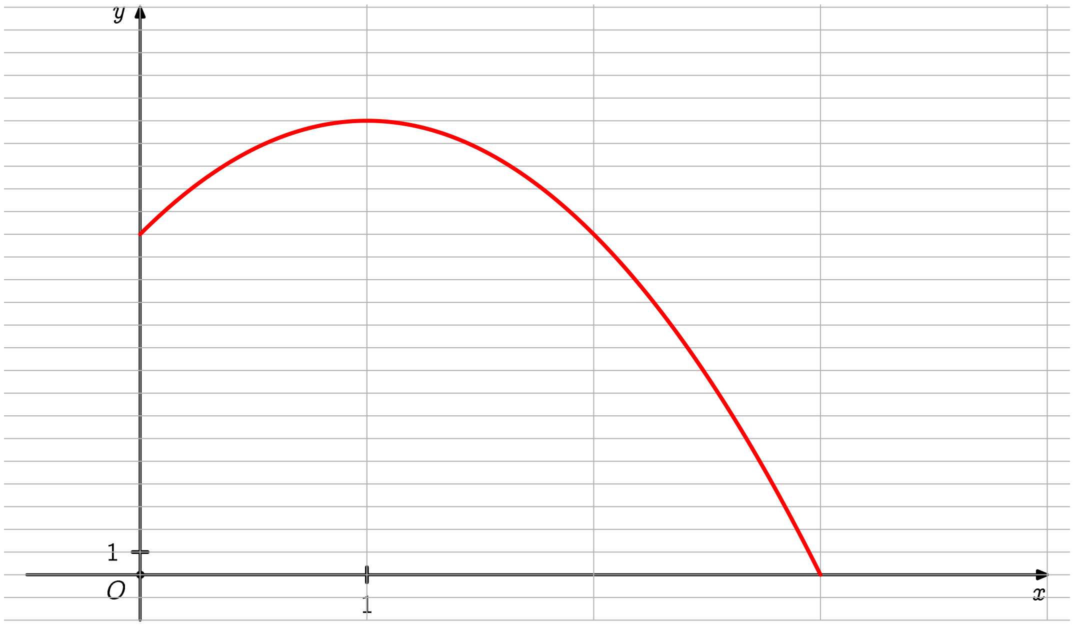
En reprenant les théorèmes vus lors de l'étude de l'ordre, essayez de déterminer quel peut être le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$

Recherche 8 - 8 **Variations des fonctions du second degré (2)**

Essayez d'étudier le sens de variations de fonctions du second degré quelconques. Y arrivez-vous tout le temps ? Y a-t-il des formes plus adaptées ?

Recherche 8 - 9 **Lancer de brebis**

Un jeune syldave s'entraîne pour le championnat régional de lancer de brebis. Il s'est inscrit dans la catégorie « falaise » : il lance donc sa brebis vers le haut, depuis le sommet d'une falaise au bord d'un lac tranquille. La hauteur en mètres de la brebis par rapport à la surface de l'eau est une fonction f du temps en seconde, représentée par la courbe (P) suivante, qui est un segment de parabole.



Partie A : Étude graphique
Avec la précision permise par la lecture du graphique précédent, répondre aux questions suivantes.

1. À quelle hauteur se trouve la brebis au moment où le garçon la lance ?
2. Pendant combien de temps, la brebis reste-t-elle à une hauteur supérieure à la hauteur d'où elle a été lancée ?
3. Au bout de combien de temps la brebis touche-t-elle la surface de l'eau avant de s'y enfoncer ?
4. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la brebis et au bout de combien de temps cette hauteur est-elle atteinte ?
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

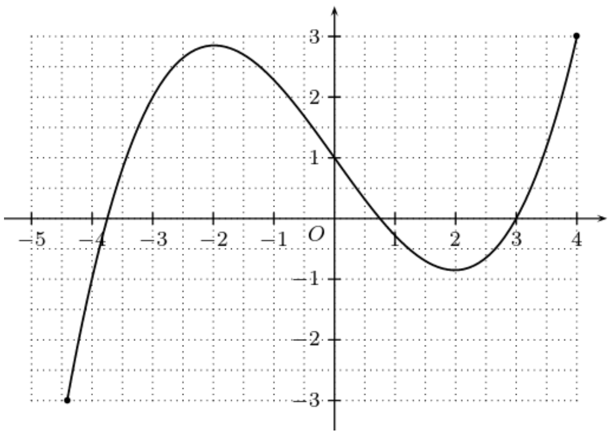
Partie B : Etude théorique
La fonction f est définie sur $[0;3]$ par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$, où x désigne le temps en secondes et $f(x)$ la hauteur de la brebis par rapport à la surface de l'eau en mètres.

1. Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire $20 - 5(x-1)^2$.
2. En justifiant précisément chaque étape de la démarche, démontrer que f est croissante sur $[0;1]$.
3. Factoriser $f(x)$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[0 ; 3]$.
   Que représente la solution dans l'expérience du lancer de la brebis ?
4. Résoudre l'inéquation $f(x) > 15$ (Penser à utiliser un tableau de signes).
   Que représentent les solutions dans l'expérience du lancer de la brebis ?
5. Quel est l'âge de la brebis ?

Recherche 8 - 10 **QCM**

Cocher les cases correspondant à des affirmations exactes. Il peut y avoir plusieurs affirmations exactes par question.

1. On considère la fonction g définie par la courbe ci-dessous :

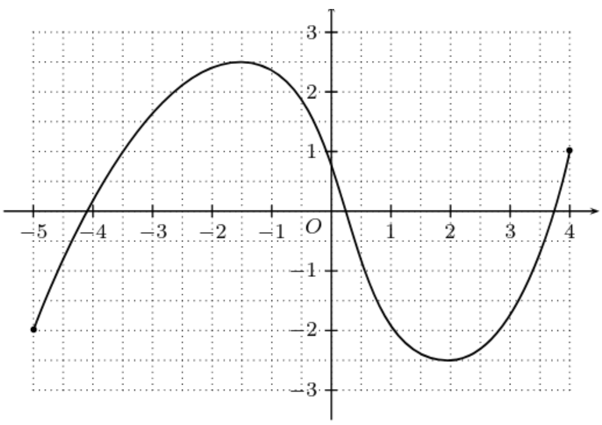


- ❒ -1 n'admet pas d'antécédent par g ;
- ❒ $g(0) = 3$;
- ❒ l'image de 2 par g est négative ;
- ❒ l'équation $g(x) = 2$ admet exactement 3 solutions.

2. Toujours avec la fonction g :

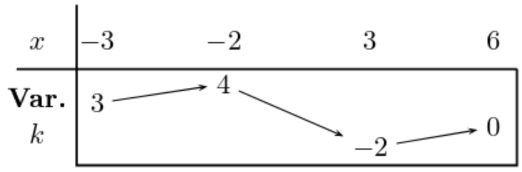
- ❒ g est croissante sur $[-2; 2]$;
- ❒ g est croissante sur $[-4; 0]$;
- ❒ g est croissante sur $[2; 4]$;
- ❒ g est décroissante sur $[-2; 2]$.

3. On considère la fonction h définie sur l'intervalle I par la courbe ci-dessous :



- ❒ son ensemble de définition est $I = [-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}]$;
- ❒ $h(-3,5) = h(4)$;
- ❒ le maximum de h sur I est $\frac{5}{2}$;
- ❒ 1 est un antécédent de 4 par h.
- ❒ le minimum de h sur I est atteint pour $x = -2,5$;
- ❒ 2 a 2 images par h.

4. Soit k une fonction définie sur $J = [-3; 6]$ vérifiant le tableau de variations suivant :

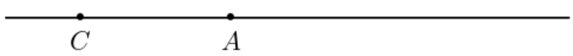


- ❒ L'image de -2 par k est 3 ;
- ❒ $k(1) > k(0)$;
- ❒ l'équation $k(x) = 3$ admet exactement deux solutions ;
- ❒ $k(6) = 0$.

5. Toujours avec la fonction k :

- ❒ k est croissante sur $[-2; 0]$;
- ❒ k est décroissante sur $[-2; 3]$;
- ❒ le min. de k sur J est atteint pour $x = 3$;
- ❒ le max. de k sur J est atteint pour $x = 4$.

6. Soit A, B et C tels que $AB = -2AC$.



- ❒ On a $CA = \frac{1}{3}CB$;
- ❒ A est le milieu de [BC] ;
- ❒ A, B et C sont alignés ;
- ❒ AB et AC sont de sens contraires.

7. Soit A, B, C, D et M tels que :

$$AB = CD \text{ et } BM = 2BD$$

- ❒ ABCD est un parallélogramme ;
- ❒ $AC = BD$;
- ❒ (AC) et (BM) sont parallèles ;
- ❒ D est le milieu de [BM].

8. Soit $E(x) = (2x+1)(x-3) + (2x+1)^2$.

- ❒ $E(x)$ est donnée sous la forme d'un produit ;
- ❒ $E(x) = (2x+1)(3x-2)$;
- ❒ $E(x) = 0 \iff$x=-1$_2$ ou $x = 3$.
- ❒ $E(x) = 0 \iff$x=-1$_2$ ou $x = \frac{2}{3}$.

9. Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne $A(5; -4)$, $B(-3; 4)$ et d la droite d'équation $y = 2x - 14$.

- ❒ d passe par A ;
- ❒ (AB) a pour coefficient directeur -1 ;
- ❒ (AB) et d sont sécantes ;
- ❒ Δ d'équation $y = 2x + 3$ est parallèle à d.

Recherche 8 - 11 **Python**

Que semble faire la fonction suivante ? Peut-on s'y fier ? Comment l'améliorer ?

```python
def mystere0():
    x = 0
    f = lambda t: 2*t*t - t + 1
    for nb_pas in range(5):
        if f(x) > f(x + 0.5):
            return "Elle ne l'est pas"
        else:
            x = x + 0.1
    return "Elle l'est"
```

Recherche 8 - 12 **Python**

Que semblent faire les fonctions suivantes ? Peut-on s'y fier ?

```python
def mystere1(f, début, fin, total_pas):
    x = début
    pas = (fin - début)/total_pas
    for nb_pas in range(total_pas):
        if f(x) > f(x + pas):
            return False
        else:
            x = début + nb_pas*pas
    return True


def mystere2(f, début, fin, pas):
    x = début
    while f(x) <= f(x + pas) and x + pas <= fin:
        x = x + pas
    return x == fin
```