Lycée Notre-Dame de Rezé

TERMINALE S3 — **15 Octobre 2018**

Devoir Surveillé - Mathématiques

Durée : cent dix-huit minutes

Exercice 3.

a. Notons (E_1) l'équation $(2+4i)z+5=(5+i)z+3i$

$$\begin{aligned}
(E_1) &\iff (2+4i-5-i)z=-5+3i\\
(E_1) &\iff z=\frac{-5+3i}{-3+3i}\\
(E_1) &\iff z=\frac{-5+3i}{-3(1-i)}\times\frac{1+i}{1+i}\\
(E_1) &\iff z=\frac{-5+3i-5i-3}{-3(1^2+1^2)}\\
(E_1) &\iff z=\frac{-8-2i}{-6}\\
(E_1) &\iff z=\frac{4+i}{3}
\end{aligned}$$

b. Soit (E_2) l'équation $\frac{2}{\bar z}=\frac{1}{2-i}+\frac{1}{1+2i}$

$$\begin{aligned}
(E_2) &\iff \frac{2}{\bar z}=\frac{1+2i+2-i}{2+4i-i+2}\\
(E_2) &\iff \frac{2}{\bar z}=\frac{3+i}{4+3i}\\
(E_2) &\iff \frac{\bar z}{2}=\frac{4+3i}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}\\
(E_2) &\iff \bar z=\frac{2(12-4i+9i+3)}{9+1}\\
(E_2) &\iff \bar z=\frac{15+5i}{5}\\
(E_2) &\iff \bar z=3+i\\
(E_2) &\iff z=3-i
\end{aligned}$$

Exercice 4.

a. On calcule $P(z_0)$ sachant que $i^3=-i$ et $\sqrt{2}^3=2\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
P(z_0) &= (i\sqrt{2})^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)(i\sqrt{2})^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)i\sqrt{2}-2i\sqrt{2}\\
P(z_0) &= -2i\sqrt{2}+2\left(2+i\sqrt{2}\right)+2(i\sqrt{2}-2)-2i\sqrt{2}\\
P(z_0) &= -2i\sqrt{2}+4+2i\sqrt{2}+2i\sqrt{2}-4-2i\sqrt{2}\\
P(z_0) &= 0
\end{aligned}$$

donc $i\sqrt{2}$ est bien une racine de P.

b. **i.** On développe et identifie :

$$\begin{aligned}
\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right) &= z^3+(a-i\sqrt{2})z^2+(b-ia\sqrt{2})z-ib\sqrt{2}\\
&= z^3+\left(-2-i\sqrt{2}\right)z^2+\left(2+i2\sqrt{2}\right)z-2i\sqrt{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\begin{cases} b=2\\ a=-2\end{cases}$

Donc $P(z)=(z-i\sqrt{2})(z^2-2z+2)$

ii. On en déduit que $P(z)=0 \iff \begin{cases} z=i\sqrt{2}\\ \text{ou}\\ z^2-2z+2=0 (E)\end{cases}$

On résout donc l'équation (E)

$$\begin{aligned}
(E) &\iff (z-1)^2-1+2=0\\
(E) &\iff (z-1)^2=-1\\
(E) &\iff z-1=\pm i\\
(E) &\iff z=1\pm i
\end{aligned}$$

Les solutions de $P(z)=0$ sont donc $1+\mathbf{i}$, $1-\mathbf{i}$ et $\mathbf{i}\sqrt{2}$.

Exercice 5.

a. $-z^2+2z-2=0 \iff z^2-2z+2=0$ qui a été résolue à l'exercice précédent et dont les solutions sont $1+\mathbf{i}$ et$1-\mathbf{i}$.
Or $z'=2 \iff -z^2+2z=2 \iff z^2-2z+2=0$
Les affixes des points demandés sont donc $1+\mathbf{i}$ et$1-\mathbf{i}$.

b. Calculons l'affixe du milieu I de $[NM']$. Alors $z_I=\dfrac{z_N+z_{M'}}{2}$.
Or $\dfrac{z_N+z_{M'}}{2}=\dfrac{z^2+(-z^2+2z)}{2}=z=z_M$ donc $I=M$

Exercice 6.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3e^{-x}$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. On calcule la dérivée. $g'(x)=3x^2e{-}x+x^3(-e^{-x})=x^2e^{-x}(3-x)$. Comme x^2 est positif sur $\mathbb{R}$ et e^{-x} est strictement positif sur $\mathbb{R}$, alors $g'(x)$ est du signe de $3-x$.
On en déduit que g est croissante sur $]-\infty,3]$ et décroissante sur $[3,+\infty[$.

b. On a $g(1)=1/e$ et $g'(1)=2/e$. Or une équation de la tangente est $y=g'(1)\times(x-1)+g(1)$ donc

$$y=\frac{2x-1}{e}$$

Exercice 7.

a. D'après l'étude statistique, on peut écrire que :

$$\underbrace{u_{n+1}}_{\text{effectif année suivante}} = (1-\frac{10}{100})_{\text{Baisse de 10\%}} + \underbrace{250}_{\text{Arrivée de 250 nouveaux élèves}} = 0,9u_n+250$$

b. **i.** Calculons w_{n+1} en fonction de w_n en cherchant k tel que $w_{n+1}=kw_n$:

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= u_{n+1}-2500\\
&= 0,9u_n+250-2500\\
&= 0,9u_n+0,1\times2500-2500\\
&= 0,9u_n-2500(1-0,1)\\
&= 0,9u_n-0,9\times2500\\
&= 0,9(u_n-2500)\\
&= 0,9w_n
\end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $w_0=u_0-2500=471$.

ii. On en déduit que pour tout entier n on a $w_n=471\times0,9^n$. Or $u_n=w_n+2500$ donc finalement :

$$u_n=471\times0,9^n+2500$$

c. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=0,9u_n+250-u_n=-0,1u_n+250=-0,1(471\times0,9^n+2500)+250=-47,1\times0,9^n-250+250=-47,1\times0,9^n$$

d. La suite (u_n) est donc décroissante car $u_{n+1}-u_n$ est négatif pour tout entier naturel n. Or $u_n=471\times0,9^n+2500>0$ donc la suite (u_n) est décroissante et minorée donc converge.

e. On cherche à trouver le plus petit entier naturel n tel que $u_n\leqslant2801$, i.e. $471\times0,9^n+2500\leqslant2801$ soit :

$$0,9^n\leqslant\frac{301}{471}\simeq0,639$$

À la calculatrice on trouve $0,9^4=0,6561$ et $0,9^5\simeq0,59$. Il faudra donc attendre $2018+5=2023$

f. Aucun ne convient...À chaque fois x est un entier et doit représenter n or il est réaffecté comme si c'était u_n avec $0,9x+250$ ou $-50\times0,9^x$...