Terminale S_4 – baccalauréat S, Pondichéry, 2014
Corrigé de l'exercice 3 (enseignement spécifique)

$z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$

1. *Forme exponentielle de* $\omega = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

   On obtient $|\omega| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\arg \omega = \frac{\pi}{6}$ (à 2π près), donc $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{i\pi}{6}}$.

2. a. *Nature de la suite* (r_n) *avec* $r_n = |z_n|$

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = |z_{n+1}| = |\omega z_n| = |\omega| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$

   Donc la suite (r_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Son premier terme est $r_0 = |z_0| = 1$.

   b. *Expression de* r_n *en fonction de* n

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $r_n = r_0 \times q^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

   c. *Comportement de la longueur* OA_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

   Comme $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} OA_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$.

3. a. *Valeur affichée par l'algorithme pour* $P = 0{,}5$

   On utilise l'algorithme avec $P = 0{,}5$:

	n	R	P	$R > P$
Initialisation	0	1	0,5	Vrai
Traitement	1	0,866	0,5	Vrai
	2	0,75	0,5	Vrai
	3	0,649 5	0,5	Vrai
	4	0,562 5	0,5	Vrai
	5	0,487	0,5	Faux
Sortie	La valeur affichée est 5			

   b. *Rôle de l'algorithme*

   Cet algorithme s'arrête dès que $R \leqslant P$ et affiche alors la valeur de n, c'est-à-dire qu'il affiche la plus petite valeur de n pour laquelle R donc $r_n = OA_n$ est inférieur ou égal à P.
   On peut donc dire que $OA_{32} > 0{,}01$ et que $OA_{33} \leqslant 0{,}01$.
   (Avec la calculatrice on obtient, à 10^{-5} près : $r_{32} = 0{,}010\,02$ et $r_{33} = 0{,}008\,68$.)

4. a. *Nature du triangle* OA_nA_{n+1}

   On a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\omega z_n - z_n}{\omega z_n} = \frac{\omega - 1}{\omega}$.

   Or, $\frac{\omega - 1}{\omega} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i}{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{i\left(\sqrt{3} + i\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + i\right)} = \frac{i}{\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}}{3}$.

Comme $\arg \dfrac{i\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, $\left(\overrightarrow{OA_{n+1}}\,;\,\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b. *Valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées*

Comme $z_n = r_n e^{\frac{in\pi}{6}}$ on a $\arg z_n = \dfrac{n\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

Le point A_n, d'affixe z_n, est sur l'axe des ordonnées si, et seulement si $\arg z_n = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc si, et seulement si $\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, soit $n = 3 + 6k$.

Comme n est un entier naturel, l'entier k doit être positif.

Donc, le point A_n est sur l'axe des ordonnées si, et seulement si $n = 3 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

c. *Figure*

Le point A_6 a pour affixe z_6 dont un argument est $\dfrac{6\pi}{6} = \pi$, donc le point A_6 sur l'axe des abscisses.

Comme le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_6, le point A_6 est le projeté orthogonal du point A_5 sur l'axe des abscisses.

Le point A_7 a pour affixe z_7 dont un argument est $\dfrac{7\pi}{6}$, ainsi les points A_1, O et A_7 sont alignés.

Comme le triangle OA_6A_7 est rectangle en A_7, le point A_7 est le projeté orthogonal du point A_6 sur la droite (OA_1).

On procède de même pour les points A_8 et A_9.