Terminale S_4 – exercices sur les limites et la continuité (2^e série)

Exercice 1

Soit la fonction g définie sur $D =]0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On ne demande pas de tracer $\mathscr{C}$.

1. a. Déterminer les limites de g en 1 à droite et à gauche, en les justifiant.
   b. En donner une interprétation graphique.
2. a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ possède une asymptote, notée Δ, en $+\infty$.
   Donner une équation de Δ.
   c. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
3. a. Justifier que, pour tout réel $x > 1$, $g(x) \geqslant 0$.
   b. On considère la fonction h définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x+1}$.
   Déterminer la limite en $+\infty$ de la composée de g suivie de h (notée $h \circ g$) en citant le théorème utilisé.

Exercice 2

1. Démontrer que l'équation $\sqrt{x} + 2x - 4 = 0$ possède une seule solution dans $[0\,;\,+\infty[$.
2. Par la méthode du balayage, déterminer une encadrement de longueur 10^{-3} de cette solution.
3. En résolvant *algébriquement* l'équation, déterminer la valeur exacte de la solution et vérifier l'encadrement trouvé à la question précédente.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x + \cos(x)}{2 + \sin(x)}$.

1. Donner un encadrement du numérateur et du dénominateur.
2. En déduire que, pour tout $x \geqslant 1$, on a $\dfrac{x-1}{3} \leqslant f(x)$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Étudier la limite de f en $-\infty$.
5. Vérifier graphiquement les résultats à l'aide d'une calculatrice en représentant la fonction f et les fonctions $x \longmapsto g(x) = \dfrac{x-1}{3}$ pour $x \geqslant 1$ et $x \longmapsto h(x) = \dfrac{x+1}{3}$ pour $x \leqslant -1$.