

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Introduction

Le théorème de MOIVRE – LAPLACE exprime que, si une variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, et si $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, alors la loi de probabilité de Z_n , lorsque n devient grand, « tend vers » la loi normale centrée réduite.

Dans certaines conditions, on peut remplacer la loi binomiale par la loi normale, les deux variables aléatoires ayant la même espérance mathématique et le même écart-type.

Les critères pour utiliser cette approximation sont : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Application

Une compagnie de transport souhaite lutter contre la fraude et effectue pour cela des contrôles de tickets de transport.

Valéry utilise ce moyen de transport tous les matins. Il a une probabilité $p = 0,08$ d'être contrôlé. Il effectue 600 voyages par an. On appelle C la variable aléatoire égale au nombre de contrôles effectués dans une année.

1. Quelle est la loi suivie par C ?
2. a. Justifier que l'on peut approximer la loi de C par la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ et donner la valeur de μ et celle de σ à 10^{-4} près.
b. En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité que Valéry soit contrôlé entre 40 et 50 fois dans l'année.
3. Sachant que le prix du ticket est de 1,20 € et que le prix de l'amende est de 20 €, quelle est la probabilité que Valéry soit « perdant » en n'achetant jamais de ticket ?