Terminales S – devoir en classe n^o 7

Jeudi 17 avril 2014

EXERCICE 1

Dans une huilerie, une machine remplit des bouteilles d'huile.
Le volume d'huile versé par la machine est une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 265$ mL et d'écart type $\sigma = 10$ mL.

1. *Pour cette question, on donnera pour les probabilités des valeurs arrondies au millième près.*
   a. Quelle est la probabilité que le volume versé par la machine soit égal à 260 mL ?
   b. Quelle est la probabilité que le volume versé par la machine soit compris entre 245 mL et 285 mL ?
   c. Sachant que le volume versé par la machine est compris entre 245 mL et 285 mL, quelle est la probabilité qu'il soit supérieur à 270 mL ?
2. Déterminer, à l'unité près, le nombre réel a tel que $P(X > a) = 0{,}7$.
   Donner une interprétation de ce résultat.
3. Un ingénieur dit qu'en modifiant légèrement la machine, il peut réduire l'écart type (sans changer la moyenne).
   Soit X_1 la variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 265$ mL et d'écart type σ_1.
   Quel devrait être ce nouvel écart type σ_1, arrondi à 0,5 près, pour que 95 % des bouteilles aient un volume d'huile compris entre 250 mL et 280 mL.
   Pour cette question, on pourra utiliser la variable aléatoire $Y = \dfrac{X_1 - \mu}{\sigma_1}$.

EXERCICE 2

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = 3x\ln(3x+1).$$

Proposition 1

Sur $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $f(x) = 3x$ a une unique solution : $\dfrac{e-1}{3}$.

Proposition 2

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$ est égal à $\dfrac{3}{2} + \ln 8$.

Proposition 3

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0.

EXERCICE 3

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^3 + 3 - 3\ln x$.

1. a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

   Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = \dfrac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$.

   b. En déduire les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   (Le calcul des limites n'est pas demandé.)

2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3\ln x}{x} + \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative, donnée en annexe (à rendre avec la copie), dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   Établir que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. On note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$.

   La parabole $\mathcal{P}$ est représentée sur l'annexe.

   Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$. On précisera les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

Partie C : calcul d'une aire

On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité, d'une part, par les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$, d'autre part, par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

1. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique de l'annexe (à rendre avec la copie).
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

   a. Pour tout réel x strictement positif, calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

   b. En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathcal{D}$, en unité(s) d'aire.

NOM : ....

Prénom : ....