Terminale S_4 – devoir à la maison n° 7
À rendre jeudi 20 mars 2014

EXERCICE 1 (n° 102 page 183)

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = xe^{-x} + e^{-x} - 1.$$

   a. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire le signe de la fonction f.

2. Soit g la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

   a. Démontrer que g est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Étudier le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Soit (J_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$J_n = \int_n^{n+1} g(x)dx.$$

   a. Comparer $g(n)$, $g(x)$ et $g(n+1)$ pour $n \leqslant x \leqslant n+1$.
   b. En déduire un encadrement de J_n.
   c. Démontrer que la suite (J_n) est décroissante.
   d. Démontrer que la suite (J_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 2

On considère la fonction F définie pour tout réel x de l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt.$$

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale.

1. Démontrer que la fonction F est dérivable sur I, et donner l'expression de sa dérivée.
2. Déterminer les variations de F sur I, et préciser son signe.
3. a. Établir que, pour tout réel t strictement positif, $\dfrac{e^t}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{t^2}$.
   b. Pour $x \in I$ calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}dt$.
   c. En déduire que, pour tout réel $x \in]0\,;\,1]$, $F(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{x}$.
   d. Déterminer la limite de F en 0.
4. a. Soit $x \geqslant 1$. Établir que, pour tout réel $t \in [1\,;\,x]$, $\dfrac{e^t}{t^2} \geqslant \dfrac{e^t}{x^2}$.
   b. En déduire que, pour tout réel $x \in [1\,;\,+\infty[$, $F(x) \geqslant \dfrac{e^x - e}{x^2}$.
   c. En admettant que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$, déterminer la limite de F en $+\infty$.