$\boxed{\text{Terminale } S_4 \text{ – corrigé du devoir à la maison n}^{\text{o}}\ 6}$

EXERCICE 1 – suites et probabilités

$\boxed{u_{n+1} = \dfrac{1}{6}u_n + \dfrac{1}{3} \text{ avec } u_1 = \dfrac{1}{2} \text{ et } v_n = u_n - \dfrac{2}{5}}$

1. a. *(v_n) est une suite géométrique*

   Pour tout entier $n \geqslant 1$:

   $$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}u_n - \frac{1}{15} = \frac{1}{6}\left(u_n - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{6}v_n.$$

   Donc (v_n) est la suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{6}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}$.

   b. *Expressions de v_n et de u_n en fonction de n*

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 q^{n-1} = \dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$ et $u_n = v_n + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{5}$.

2. a. *Valeur de a_1*

   $a_1 = P(A_1) = \dfrac{1}{2}$ (on suppose que les deux dés ont la même probabilité d'être choisis).

   b. *Calcul de r_1*

   D'après l'énoncé, $P_{A_1}(R_1) = \dfrac{1}{2}$, $P_{\overline{A_1}}(R_1) = \dfrac{2}{3}$ donc $P_{A_1}\left(\overline{R_1}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{\overline{A_1}}\left(\overline{R_1}\right) = \dfrac{1}{3}$.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $$r_1 = P(R_1) = P(R_1 \cap A_1) + P\left(R_1 \cap \overline{A_1}\right) = P_{A_1}(R_1) \times P(A_1) + P_{\overline{A_1}}(R_1) \times P\left(\overline{A_1}\right)$$
   $$r_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

   c. *Décomposition de l'évènement R_n et calcul de r_n en fonction de a_n*

   A_n et $\overline{A}_n$ sont deux évènements contraires donc :

   $$R_n = R_n \cap \left(A_n \cup \overline{A_n}\right) = (R_n \cap A_n) \cup \left(R_n \cap \overline{A_n}\right)$$

   (distributivité de l'intersection par rapport à la réunion).

   Les évènements $R_n \cup A_n$ et $R_n \cup \overline{A_n}$ sont incompatibles donc :

   $$r_n = P(R_n) = P(R_n \cap A_n) + P\ \left(R_n \cap \overline{A_n}\right) = P_{A_n}(R_n) \times P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(R_n) \times P\left(\overline{A_n}\right)$$
   $$r_n = \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}(1 - a_n) = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}.$$

   d. *Décomposition de l'évènement A_{n+1}*

   On utilise le dé A à la partie numéro $n + 1$ lorsque :

   – on a utilisé le dé A à la partie numéro n et que l'on a obtenu une face rouge : évènement $A_n \cap R_n$;

   – ou, on a utilisé le dé B à la partie numéro n et que l'on a obtenu une face blanche : évènement $\overline{A_n} \cap \overline{R_n}$.

   Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$.

   e. *Relation entre a_{n+1} et a_n et expression de a_n en fonction de n*

   Les évènements $A_n \cap R_n$ et $\overline{A_n} \cap \overline{R_n}$ sont incompatibles car les évènements A_n et $\overline{A_n}$ le sont aussi, donc :

   $$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap R_n) + P\left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right) = P_{A_n}(R_n) \times P(A_n) + P_{\overline{A_n}}\left(\overline{R_n}\right) \times P\left(\overline{A_n}\right)$$
   $$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n) = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}.$$

Comme $a_1 = \dfrac{1}{2}$, (a_n) est la suite (u_n) de la première question donc, $a_n = \dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{5}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

f. *Expression de* r_n *en fonction de* n *et limite de* (r_n)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, $r_n = -\dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} + \dfrac{3}{5}$.

Comme $0 < \dfrac{1}{6} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \dfrac{3}{5}$.

Ainsi, après un grand nombre d'expériences, la probabilité d'obtenir une face rouge sera très proche de $\dfrac{3}{5}$.

EXERCICE 2 – géométrie dans l'espace

1. a. *Les points* A, B *et* C *déterminent un plan noté* P_1

On vérifie que les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas proportionnelles, ainsi ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés : ils déterminent un plan P_1.

b. *Les points* O, D *et* E *déterminent aussi un plan noté* P_2

On procède comme à la question précédente avec les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$.

2. a. *Les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{OD}$ *ne sont pas coplanaires*

Pour tout $(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma) \in \mathbb{R}^3$, si $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ alors $\begin{cases} -3\alpha - \beta + 6\gamma = 0 \\ -2\beta = 0 \\ -\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases}$

En résolvant ce système, on obtient la solution unique $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ ne sont pas coplanaires.

b. *Conséquence pour les plan* P_1 *et* P_2

La droite (OD) contenue dans le plan P_2 est donc sécante avec le plan P_1 donc les plans P_1 et P_2 sont sécants.

3. a. *Représentations paramétriques des plans* P_1 *et* P_2

On obtient $\begin{cases} x = -3t_1 - t_1' \\ y = -2t_1' \\ z = 1 - t_1 - t_1' \end{cases}$ avec $(t_1\ ;\ t_1') \in \mathbb{R}^2$ pour P_1 et $\begin{cases} x = 6t_2 \\ y = 3t_2' \\ z = -t_2 + t_2' \end{cases}$ avec $(t_2\ ;\ t_2') \in \mathbb{R}^2$ pour P_2.

b. *Représentation paramétrique de la droite* $d = P_1 \cap P_2$

$M \in d$ si, et seulement si, $\begin{cases} x = -3t_1 - t_1' = 6t_2 \\ y = -2t_1' = 3t_2' \\ z = 1 - t_1 - t_1' = -t_2 + t_2' \end{cases}$ et en résolvant ce système on obtient

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3t_2' \\ z = \dfrac{1}{3} + t_2' \end{cases}$ avec $t_2' \in \mathbb{R}$: c'est une représentation paramétrique de d.

Cette droite d passe donc par le point $F(-2\ ;\ 2\ ;1)$, obtenu avec $t_2' = \dfrac{2}{3}$, et a pour vecteur directeur $\vec{v}$ de coordonnées $(0\ ;\ 3\ ;\ 1)$.