Graphes

Terminale ES (enseignement de spécialité)
Lycée Charles PONCET

Décembre 2013

Table des matières

Le symbole ✎ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Généralités sur les graphes

1.1 Graphes non orientés

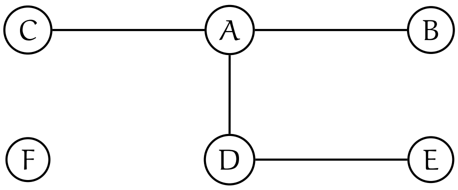
Définition 1.1.1
Un graphe non orienté *est un ensemble de points, appelés* sommets *dont certains peuvent être reliés, ces liens sont les* arêtes *du graphe.*

Définition 1.1.2
- *L'*ordre *d'un graphe est le nombre total de ses sommets.*
- *Le* degré *d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.*

Définition 1.1.3
- *Une boucle est une arête reliée deux fois au même sommet.*
- *Un graphe est* simple *s'il ne présente aucune boucle et si deux arêtes ne relient jamais les mêmes paires de sommets.*

Définition 1.1.4
- *Deux sommets reliés par une arête sont des sommets* adjacents.
- *Un sommet est* isolé *s'il n'est relié à aucun autre sommet du graphe.*

Exemple



Pour le graphe ci-contre, indiquer :
- l'ordre du graphe ;
- deux sommets adjacents ;
- un sommet isolé ;
- le degré de chaque sommet.

Théorème 1.1.1
La somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté *est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.*

⇒ Vérifier le théorème 1.1.1 avec la graphe de l'exemple précédent.
☞ Le théorème 1.1.1 donne une condition nécessaire pour qu'un graphe soit constructible : la somme des degrés des sommets doit être un nombre pair.

1.2 Graphes complets

Définition 1.2.1
Un graphe est complet si tous ses sommets sont adjacents.

⇒ Représenter les graphes complets d'ordre 3, noté K_3, d'ordre 4, noté K_4, et d'ordre 5, noté K_5.

1.3 Sous-graphes

Définition 1.3.1
Un sous-graphe *d'un graphe* G *est un graphe composé de certains sommets de* G *ainsi que des arêtes qui les relient.*

☞ K_3 est un sous-graphe de K_4 et de K_5, de même, K_4 est un sous-graphe de K_5.
⇒ Exercice n° 8 page 50.

Définition 1.3.2
Un sous-graphe est stable *s'il n'a pas d'arêtes.*

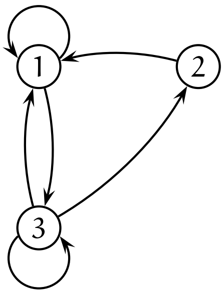
⇒ Exercice n° 9 page 50.

1.4 Graphes orientés

Définition 1.4.1
Un graphe orienté *est un graphe dont les arêtes sont orientées.*

☛ Pour un graphe orienté, une arête a une *origine* et une *extrémité*. Les arêtes ne sont parcourues que dans un sens.

Exemple de graphe orienté



2 Chaînes et cycles eulériens

2.1 Définitions

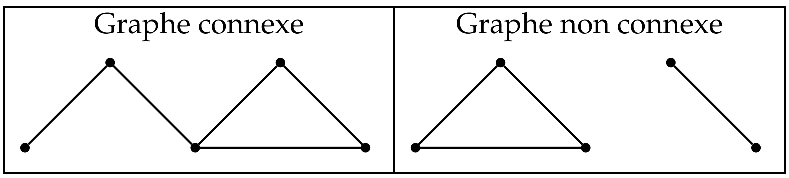
Définition 2.1.1

- *Une* chaîne *est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste est adjacent au suivant.*
- *Une* chaîne fermée *est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues.*

➠ En utilisant le graphe orienté précédent, donner un exemple de chaîne et un exemple de chaîne fermée.

Définition 2.1.2
Un graphe est connexe *s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.*

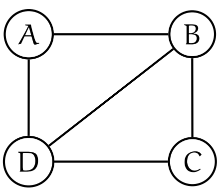
➠ Cela signifie que l'on peut relier deux sommets quelconques du graphe par une chaîne.



Définition 2.1.3

- *Un* cycle *est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.*
- *Une chaîne est* eulérienne *lorsqu'elle contient chaque arête du graphe une fois et une seule.*
- *Si une chaîne eulérienne est fermée, on dit qu'il s'agit d'un* cycle eulérien.

Exemple



Déterminer une chaîne eulérienne pour le graphe ci-contre.

2.2 Le théorème d'EULER

Théorème 2.2.1

- *Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si, et seulement si, le nombre de ses sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.*
- *Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair.*

☞ Chercher le problème n° 7 page 42 : les sept ponts de Königsberg.

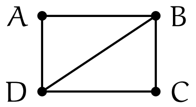
3 Matrice d'adjacence

3.1 Longueur d'une chaîne

Définition 3.1.1

- *La* longueur *d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.*
- *La* distance *entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne qui relie ces deux sommets.*
- *Le* diamètre *d'un graphe connexe est la plus grande distance entre deux sommets.*

Exemple



a. Déterminer une chaîne de longueur 2, une autre de longueur 3 et une de longueur 4.

b. Déterminer une chaîne fermée, une chaîne eulérienne.

c. Déterminer le diamètre du graphe.

3.2 Matrice d'adjacence d'un graphe

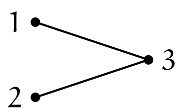
Définition 3.2.1

On considère un entier naturel n non nul et G un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La matrice d'adjacence *du graphe G est la matrice carrée d'ordre n dont l'élément situé à la ligne numéro i et à la colonne numéro j est le nombre d'arêtes partant du sommet numéro i et arrivant au sommet numéro j.*

Propriété 3.2.1

- *La matrice d'adjacence d'un graphe simple ne comporte que des 0 ou 1.*
- *La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.*

Exemples



Donner la matrice d'adjacence du graphe non orienté ci-contre.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Représenter un graphe dont la matrice d'adjacence est M.

Propriété 3.2.2

On considère un entier naturel n non nul et M la matrice d'adjacence d'un graphe G d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
Pour tout entier naturel p non nul, l'élément $a_{i,j}$ situé à la ligne n° i et à la colonne n° j de la matrice $A = M^p$ est le nombre de chaînes de longueur p reliant le sommet n° i au sommet n° j.