TS - Probabilités conditionnelles

Exercice 64 page 378

Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale (portant sur une seule oreille) ou bilatérale (portant sur deux oreilles). On admet que, dans une population donnée, les deux événements :

D : *"être atteint de surdité à l'oreille droite" et*

G : *"être atteint de surdité à l'oreille gauche".*

sont indépendants et tous deux de probabilité $0,05$*, ce que l'on note* $p(G) = p(D) = 0,05$*.*
On considère les événements suivants :

B : *"être atteint de surdité bilatérale";*

U : *"être atteint de surdité unilatérale";*

S : *"être atteint de surdité (sur une oreille au moins)".*

On donnera les valeurs numériques des probabilités demandées sous forme décimale approchée à 10^{-4} *près.*

1. a. *Calculer* $p(D \cap G)$ *et en déduire* $p\left(D \cap \overline{G}\right)$, $p\left(\overline{D} \cap G\right)$ *et* $p\left(\overline{D} \cap \overline{G}\right)$.

Puisque les événements D et G sont indépendants, on a :
$p(\mathrm{D} \cap \mathrm{G}) = p(\mathrm{D}) \times p(\mathrm{G}) = 0,05 \times 0,05 = \boxed{0,0025.}$

► G et $\overline{\mathrm{G}}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} & p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{D} \cap \mathrm{G}) + p\left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{G}}\right) \\ \Leftrightarrow\ & p\left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{G}}\right) = p(\mathrm{D}) - p(\mathrm{D} \cap \mathrm{G}) \\ \Leftrightarrow\ & p\left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{G}}\right) = 0,05 - 0,0025 = \boxed{0,0475.} \end{aligned}$$

► De même, D et $\overline{\mathrm{D}}$ forment une partition de l'univers, donc :

$$\begin{aligned} & p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{G} \cap \mathrm{D}) + p\left(\mathrm{G} \cap \overline{\mathrm{D}}\right) \\ \Leftrightarrow\ & p\left(\mathrm{G} \cap \overline{\mathrm{D}}\right) = p(\mathrm{G}) - p(\mathrm{G} \cap \mathrm{D}) \\ \Leftrightarrow\ & p\left(\mathrm{G} \cap \overline{\mathrm{D}}\right) = 0,05 - 0,0025 = \boxed{0,0475.} \end{aligned}$$

► $\overline{\mathrm{D}}$ est l'événement contraire de D :
$p\left(\overline{\mathrm{D}}\right) = 1 - p(\mathrm{D}) = 0,95.$

En appliquant, une fois de plus la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} & p\left(\overline{\mathrm{D}}\right) = p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{G}\right) + p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \overline{\mathrm{G}}\right) \\ \Leftrightarrow\ & p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \overline{\mathrm{G}}\right) = p\left(\overline{\mathrm{D}}\right) - p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{G}\right) \\ \Leftrightarrow\ & p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \overline{\mathrm{G}}\right) = 0,95 - 0,0475 = \boxed{0,9025.} \end{aligned}$$

b. *Vérifier l'indépendance des événements* D *et* $\overline{G}$, $\overline{D}$ *et* G, *et* $\overline{D}$ *et* $\overline{G}$.

➜ Pour les événements D et $\overline{\mathrm{G}}$, on a :
$p\left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{G}}\right) = 0,0475$
et $p(\mathrm{D}) \times p\left(\overline{\mathrm{G}}\right) = 0,05 \times 0,95 = 0,0475.$

$\boxed{\text{Donc } p\left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{G}}\right) = p(\mathrm{D}) \times p\left(\overline{\mathrm{G}}\right) \text{ et les événements D et } \overline{\mathrm{G}} \text{ sont indépendants.}}$

➜ Pour les événements G et $\overline{\mathrm{D}}$, on a :
$p\left(\mathrm{G} \cap \overline{\mathrm{D}}\right) = 0,0475$
et $p(\mathrm{G}) \times p\left(\overline{\mathrm{D}}\right) = 0,05 \times 0,95 = 0,0475.$

$\boxed{\text{Les événements G et } \overline{\mathrm{D}} \text{ sont donc indépendants.}}$

➜ Pour les événements $\overline{\mathrm{G}}$ et $\overline{\mathrm{D}}$, on a :
$p\left(\overline{\mathrm{G}} \cap \overline{\mathrm{D}}\right) = 0,9025$ et
$p\left(\overline{\mathrm{G}}\right) \times p\left(\overline{\mathrm{D}}\right) = 0,95 \times 0,95 = 0,9025.$

$\boxed{\text{Les événements } \overline{\mathrm{G}} \text{ et } \overline{\mathrm{D}} \text{ sont donc indépendants.}}$

c. *Calculer* $p(B)$, $p(S)$ *et* $p(U)$.

- On remarque que, $\mathrm{B} = \mathrm{G} \cap \mathrm{D}$, donc :
  $p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{G} \cap \mathrm{D}) = \boxed{0,0025.}$
- On remarque que, $\mathrm{S} = \mathrm{G} \cup \mathrm{D}$, donc :
  $$\begin{aligned} p(\mathrm{S}) &= p(\mathrm{G} \cup \mathrm{D}) \\ &= p(\mathrm{G}) + p(\mathrm{D}) - p(\mathrm{G} \cap \mathrm{D}) \\ &= 0,05 + 0,05 - 0,0025 = \boxed{0,0975.} \end{aligned}$$
- On remarque que, U = "être sourd de l'oreille gauche et pas de l'oreille droite OU être sourd de l'oreille droite et pas de l'oreille gauche" = $\left(\mathrm{G} \cap \overline{\mathrm{D}}\right) \cup \left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{G}}\right)$.
  De plus, $\mathrm{G} \cap \overline{\mathrm{D}}$ et $\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{G}}$ sont incompatibles, donc :
  $$\begin{aligned} p(\mathrm{U}) &= p\left[\left(\mathrm{G} \cap \overline{\mathrm{D}}\right) \cup \left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{G}}\right)\right] \\ &= p\left(\mathrm{G} \cap \overline{\mathrm{D}}\right) + \left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{G}}\right) \\ &= 0,0475 + 0,0475 = \boxed{0,095.} \end{aligned}$$

2. *On suppose qu'un sujet pris au hasard dans la population considérée est atteint de surdité. Quelle est la probabilité :*

a. *qu'il soit atteint de surdité à droite ?* Il s'agit de calculer $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{D})$.
On peut remarquer que : $\mathrm{D} \cap \mathrm{S} = \mathrm{D}$, donc,

$$p_{\mathrm{S}}(\mathrm{D}) = \frac{p(\mathrm{D} \cap \mathrm{S})}{p(\mathrm{S})} = \frac{p(\mathrm{D})}{p(\mathrm{S})} = \frac{0,05}{0,0975} \simeq \boxed{0,5128.}$$

b. *qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?* Calculons $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{B})$.
En remarquant que : $\mathrm{B} \cap \mathrm{S} = \mathrm{B}$, on a :

$$p_{\mathrm{S}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{S})}{p(\mathrm{S})} = \frac{p(\mathrm{B})}{p(\mathrm{S})} = \frac{0,0025}{0,0975} \simeq \boxed{0,0256.}$$

3. *Calculer $p(D\cap U)$, puis $p\left(D\cap \overline{U}\right)$. En déduire $p_U(D)$, ainsi que $p_{\overline{U}}(D)$.*

On remarque :

$\mathrm{D}\cap \mathrm{U}$: "être sourd à droite et d'une seule oreille", c'est-à-dire, "être sourd à droite mais pas à gauche", donc : $\mathrm{D}\cap\mathrm{U}=\mathrm{D}\cap\overline{\mathrm{G}}$.

De même, $\mathrm{D}\cap\overline{\mathrm{U}}$: "être sourd à droite et pas d'une seule oreille", c'est-à-dire, "être sourd à droite et à gauche", donc : $\mathrm{D}\cap\overline{\mathrm{U}}=\mathrm{B}$.

Finalement : $p(\mathrm{D}\cap\mathrm{U})=p\left(\mathrm{D}\cap\overline{\mathrm{G}}\right)=\boxed{0,0475.}$

et $p\left(\mathrm{D}\cap\overline{\mathrm{U}}\right)=p(\mathrm{B})=\boxed{0,0025.}$

Remarque : U et $\overline{\mathrm{U}}$ forment une partiton de l'univers, on retrouve par la formule des probabilités totales,

$$p(\ D)=p(\mathrm{D}\cap\mathrm{U})+p\left(\mathrm{D}\cap\overline{\mathrm{U}}\right)=0,0475+0,0025=0,05.$$

On en déduit :

- $p_{\mathrm{U}}(\mathrm{D})=\dfrac{p(\mathrm{U}\cap\mathrm{D})}{p(\mathrm{U})}=\dfrac{0,0475}{0,095}=\boxed{0,5.}$
- $p_{\overline{\mathrm{U}}}(\mathrm{D})=\dfrac{p\left(\overline{\mathrm{U}}\cap\mathrm{D}\right)}{p\left(\overline{\mathrm{U}}\right)}=\dfrac{0,0025}{0,905}\simeq\boxed{0,0028.}$

4. *Calculer la probabilité que, sur 10 personnes de cette population prises au hasard, au moins l'une d'entre elles soit atteinte de surdité bilatérale.*

► Soit A l'événement : "sur 10 personnes de cette population prises au hasard, au moins l'une d'entre elles est atteinte de surdité bilatérale."

► Ainsi $\overline{A}$ est l'événement : "sur 10 personnes de cette population prises au hasard, aucune d'entre elles n'est atteinte de surdité bilatérale."

► Si l'on choisit une personne, la probabilité qu'elle soit atteinte de surdité bilatérale est

$p(\mathrm{B})=0,0025$.

La probabilité qu'elle ne soit pas atteinte de surdité bilatérale est donc

$1-p(\mathrm{B})=1-0,0025=0,9975$.

► On répète dix fois la même expérience de façon indépendante donc la probabilité qu'aucune d'entre elles ne soit atteinte de surdité bilatérale est : $p(\overline{A})=0,9975^{10}$.

et ainsi

$\boxed{p(A)=1-0,9975^{10}=0,0247.}$