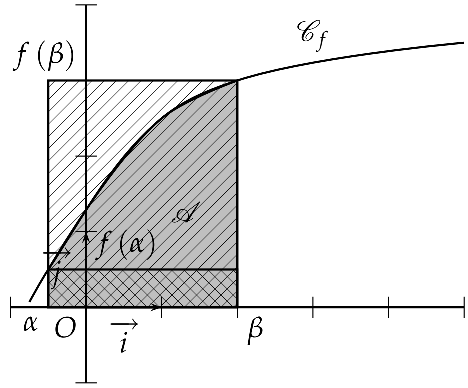
7 Intégrales et primitives

1. Aire d'un domaine délimité par une courbe

1 - 1. Petite remarque préliminaire . . .

Soit f une fonction continue, positive et strictement croissante sur un intervalle $\mathrm{I} = [\alpha\,;\,\beta]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (cf. figure ci-contre).
Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \beta$, Alors :

$$(\beta - \alpha)\, f(\alpha) < \mathscr{A} < (\beta - \alpha)\, f(\beta).$$



1 - 2. Choses sérieuses !

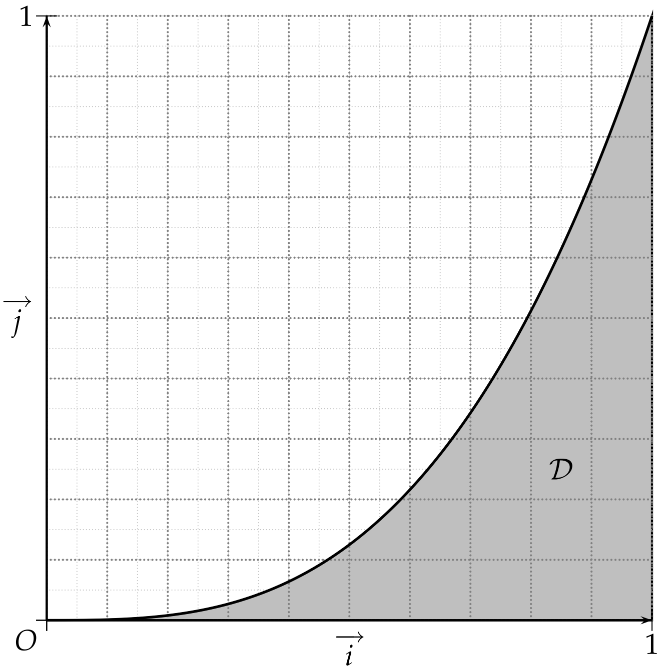
Ci contre la courbe représentative de la fonction,

$$f : x \mapsto x^3.$$

$\mathcal{S}$ est l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe et les droites d'équation $x = 1$ et $y = 0$.
Soit n un entier naturel non nul.
On subdivise l'intervalle $[0\,;\,1]$ à l'aide des points

$$a_i = \frac{i}{n} \text{ avec } 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Sur $[a_i\,;\,a_{i+1}]$, on construit le rectangle R_i de hauteur $f(a_i)$ et le rectangle $R_i{}'$ de hauteur $f(a_{i+1})$.
Soit A_n la somme des aires des rectangles R_i contenus dans $\mathcal{D}$ et B_n la somme des rectangles $R_i{}'$ contenant $\mathcal{D}$.



1. Construire les rectangles correspondant à $n = 2$.
2. Construire les rectangles correspondant à $n = 4$.
3. Vérifier que :
   - $A_n = \dfrac{1}{n^4}\left[1 + 2^3 + 3 + \ldots + (n-1)^3\right]$;
   - $B_n = \dfrac{1}{n^4}\left[1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3\right]$.
4. Calculer : $u_n = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ (quelques essais pour conjecturer et une récurrence !).
5. Calculer A_n et B_n en fonction de n.
6. Montrer que les suites (A_n) et (B_n) sont adjacentes.
7. Déterminer la valeur de $\mathcal{S}$.

1 - 3. Avec GeoGebra

1. Construire la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 6x$
2. Créer un curseur n variant de 1 à 100 avec un pas de 1.
3. Créer $\mathcal{S}_1$ = "SommmeInferieure[f,1,5,n]".

4. Créer $\mathcal{S}_2$ = "SommmeSupérieure[f,1,5,n]".
5. Faire varier n de 1 à 100. Que peut-on conjecturer ?

2. Notion d'intégrale

<u>**Définition**</u> 2.1 : Le plan étant muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, **l'unité d'aire** est l'aire du rectangle construit à partir des points O, I et J avec $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

<u>**Définition et propriété**</u> 2.2 : Dans un repère orthogonal, $\mathscr{C}$ étant la courbe représentative d'une fonction f **continue et de signe constant** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors le domaine défini par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ admet une aire $\mathcal{A}$.

- **L'intégrale de a à b de la fonction** et notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est alors définie par :
  - si f est positive sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{A}$;
  - si f est négative sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\mathcal{A}$.
- a et b sont les **bornes** de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit : "intégrale (ou somme) de a à b de $f(t)\,\mathrm{d}t$".
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$; on dit que, dans l'écriture $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, t est une variable muette.

<u>*Exemple*</u> 1 : *Soit la fonction f définie par $f(x) = x - 2$. Calculer :*

- $I = \int_2^4 f(t)\,dt$;
- $J = \int_0^2 f(t)\,dt$.

<u>*Exemple*</u> 2 : *Calculer $I = \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$.*

<u>**Définition**</u> 2.3 : Soit f une fonction continue et changeant de signe sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

- Soit $\mathcal{A}_1$, l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et situé au dessus de l'axe des abscisses.
- Soit $\mathcal{A}_2$, l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et situé au dessous de l'axe des abscisses.

$$\text{On pose alors : } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2.$$

<u>*Exemple*</u> 3 :

1. *Soit la fonction définie par : $f(x) = -x + 3$. Calculer $I = \int_0^4 f(x)\,dx$.*
2. *Calculer $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.*

<u>**Définition**</u> 2.4 : Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$.

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

<u>*Exemple*</u> 4 : *Soit la fonction définie par : $f(x) = x + 4$. Calculer $I = \int_2^0 f(x)\,dx$.*

3. Propriétés de l'intégrale

3 - 1. Propriétés algébriques

Théorème 3.1 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors :

- Pour tout a de I, $\displaystyle\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$.
- Pour tous a, b et c de I, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ (Relation de Chasles).

Exemple 5 *: Simplifier* $I = \displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\ dx - \int_4^5 f(x)\ dx$.

Théorème 3.2 ***(Linéarité de l'intégrale)*** : Soit f et g deux fonctions continue sur un intervalle I, a et b des réels de I et α un réel quelconque, on a :

$$\int_a^b [\alpha f(t)]\ \mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b [f(t)+g(t)]\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exemple 6 *: Calculer* $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(3\sqrt{1-x^2}+4x\right)\ dx$.

3 - 2. Intégrales et ordre

Théorème 3.3 :

- Soit f une fonction intégrable sur $[a\,;\,b]$. Si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$.
- Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a\,;\,b]$. Si $f \geqslant g$ sur $[a\,;\,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

Théorème 3.4 ***(Inégalité de la moyenne)*** : Soit f une fonction intégrable sur $[a\,;\,b]$.

- S'il existe deux réels m et M tels que, pour tout t de $[a\,;\,b]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$, alors :

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant M\,(b-a).$$

- S'il existe un réel M tel que, pour tout t de $\left[{}'\,;\,a\right]\,b$, $|f(t)| \leqslant M$, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant M\,(b-a).$$

Exemples 7 *:*

1. *Montrer que :* $\displaystyle\int_1^3 \sin\left(t^2\right)\ dt \leqslant 2$.
2. *Montrer que :* $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\ dt \leqslant \frac{1}{2}$.
3. *Etudier la limite de la suite* (u_n) *avec* $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x}\ dx$.

Définition 3.1 : Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$. La **valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$** est le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exemple 8 *: Soit la fonction* f *définie par* $f(x) = x+2$*. Calculer la valeur moyenne de* f *sur l'intervalle* $[-3\,;\,4]$.

4. Intégrales et primitives

Soit f une fonction continue, positive et strictement croissante sur un intervalle I, a un réel appartenant à I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Soit x_0 un réel de I et soit la fonction F définie sur I par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Que vaut $F(a)$?
2. Soit h un réel strictement positif tel que $x_0 + h \in \mathrm{I}$.
   (a) Que représente $F(x_0 + h) - F(x_0)$?
   (b) Justifier f graphiquement que :
   $$h \times f(x_0) \leqslant F(x_0 + h) - F(x_0) \leqslant h \times f(x_0 + h).$$
   (c) En déduire $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$.
3. Calculer, de la même façon, $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$.
4. En déduire que F est dérivable sur I et déterminer F'.

$$\boxed{\text{On dit que } F \text{ est une primitive de } f.}$$

5. **Application :** on prend $\mathrm{I} = [0\,;\,1]$ et $f : x \mapsto x^2$;
   Dans un repère orthogonal, déterminer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe $\mathscr{C}_f$.

5. Primitives d'une fonction

5 - 1. Définition

Définition $_{5.1}$: Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F, dérivable sur I, telle que, pour tout x de I :

$$F'(x) = f(x).$$

Exemple $_9$: *Soit les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x\ln x - x$.*

1. *Vérifier que g est une primitive de f.*
2. *Donner des primitives de f différentes de g.*
3. *Donner la forme générale des primitives de f.*

Théorème $_{5.1}$ ***(admis)*** : Toute fonction f continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Théorème $_{5.2}$: Soit F une primitive de f sur un intervalle I, alors :

- Pour tout réel k, la fonction $G : x \mapsto F(x) + k$ est une primitive de f.
- Toute primitive de f sur I est de ce type.

Exemple $_{10}$:

1. *Déterminer toutes les primitives de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2x$.*
2. *Déterminer **la** primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.*

Théorème $_{5.3}$: Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Etant donné un réel x_0 de I et y_0 un réel quelconque, il existe une unique primitive F de f sur I telle que : $F(x_0) = y_0$.

5 - 2. Où l'on découvre les primitives tout en révisant agréablement ses formules de dérivation...

Connaissant une fonction f, on veut trouver une primitive F de f, c'est à dire une fonction F, admettant f pour dérivée sur un ou plusieurs intervalles à définir.

Fonction $f = F'$	Fonction F, primitive de f	Fonction $g = G'$	Fonction G, primitive de g
$f_1 : x \mapsto 2x+1$	$F_1 : x \mapsto$	$g_1 : x \mapsto \cos x$	$G_1 : x \mapsto$
$f_2 : x \mapsto x$	$F_2 : x \mapsto$	$g_2 : x \mapsto \sin 2x$	$G_2 : x \mapsto$
$f_3 : x \mapsto 3x+4$	$F_3 : x \mapsto$	$g_3 : x \mapsto \cos 2x - 3\sin 4x$	$G_3 : x \mapsto$
$f_4 : x \mapsto x^2 + x$	$F_4 : x \mapsto$	$g_4 : x \mapsto \cos x - x\sin x$	$G_4 : x \mapsto$
$f_5 : x \mapsto x^3$	$F_5 : x \mapsto$	$g_5 : x \mapsto \dfrac{3}{\cos^2 x}$	$G_5 : x \mapsto$
$f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$F_6 : x \mapsto$	$g_6 : x \mapsto \mathrm{e}^x$	$G_6 : x \mapsto$
$f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$	$F_7 : x \mapsto$	$g_7 : x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$	$G_7 : x \mapsto$
$f_8 : x \mapsto x^n$	$F_8 : x \mapsto$	$g_8 : x \mapsto 5x^2 + 2x + \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x^2}$	$F_9 : x \mapsto$

Fonction $f = F'$	Fonction F, primitive de f	Fonction $g = G'$	Fonction G, primitive de g
$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{4x+1}$	$F_1 : x \mapsto$	$g_1 : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$	$G_1 : x \mapsto$
$f_2 : x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$	$F_2 : x \mapsto$	$g_2 : x \mapsto \dfrac{3}{x+2}$	$G_2 : x \mapsto$
$f_3 : x \mapsto x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$	$F_3 : x \mapsto$	$g_3 : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$	$G_3 : x \mapsto$
$f_4 : x \mapsto x\left(2x^2-4\right)^5$	$F_4 : x \mapsto$	$g_4 : x \mapsto (3x-4)^7$	$G_7 : x \mapsto$

Et pour finir, déterminer une primitive de la fonction $h : x \mapsto 1 + \ln x$, définie sur $]0\,;+\infty[$.

6. Primitives et intégrales

Théorème $_{6.1}$: Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I.
La fonction F définie par $\boldsymbol{x} \mapsto \displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f(t)}\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemple $_{11}$: *Soit la fonction F définie par* $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$. *Etudier les variations de F.*

Théorème $_{6.2}$: Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a un réel de I et F est une primitive de f sur I, alors :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

Exemple $_{12}$: *Calculer* $I = \displaystyle\int_{-1}^{3} \mathrm{e}^{2t}\ dt$.

7. Tableaux de primitives

7 - 1. Fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Commentaires
$x \mapsto a$, a réel	$x \mapsto ax$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$, n entier relatif différent de -1	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	• si $n \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}$ • si $n \leqslant -2$, sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
$x \mapsto \dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$x \mapsto \ln x$	sur $]0\,;+\infty[$.
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	sur $]0\,;+\infty[$.
$x \mapsto x^a$, a réel, $a \neq -1$	$x \mapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	sur $]0\,;+\infty[$.
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, par exemple.
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	sur $\mathbb{R}$

7 - 2. Opérations et composition

Fonction	Une primitive	Commentaires	Exemples : déterminer une primitive des fonctions ci-dessous.
au', a réel	au		$f : x \mapsto 3\cos x$
$u' + v'$	$u + v$		$g : x \mapsto \cos x + \mathrm{e}^x$
$u'v + uv'$	uv		$h : x \mapsto \sin x + x\cos x$
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	sur tout intervalle où $u(x) \neq 0$ si n est négatif	$i : x \mapsto \sin x \cos^7 x$
$u'u^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	sur tout intervalle où $u > 0$	$j : x \mapsto 2x\sqrt{x^2+1}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	sur tout intervalle où $u > 0$	$k : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$ $\ln(-u)$	sur tout intervalle où $u > 0$ sur tout intervalle où $u < 0$	$l : x \mapsto \dfrac{3x}{x^2+1}$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u		$m : x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2+1}$
$u'\cos u$	$\sin u$		$n : x \mapsto x\cos\left(x^2+1\right)$
$u'\sin u$	$-\cos u$		$o : x \mapsto x\sin\left(x^2+1\right)$
$u' \times (v' \circ u)$	$v \circ u$		$p : x \mapsto \dfrac{3x}{\cos^2\left(x^2+1\right)}$

7 - 3. Intégration par parties

Théorème $_{7.1}$: Soit u et v deux fonctions deux fois dérivables sur $[a\,;\,b]$, alors :

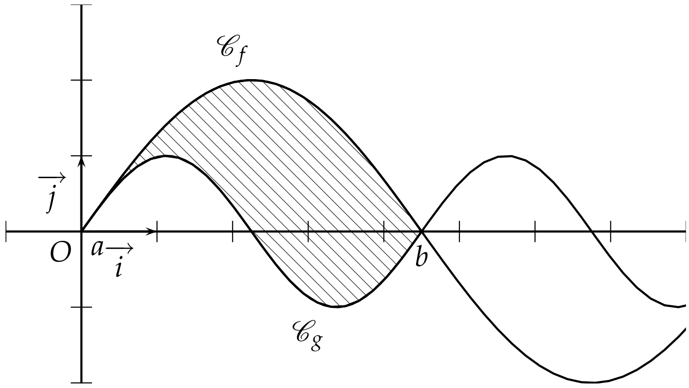
$$\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exemples $_{13}$ *: Calculer :*

- $I = \int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,dx$;
- $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\,dx$;
- $K = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,dx$.

8. Calcul de grandeurs : aires, volumes, etc..

8 - 1. Calcul d'aires



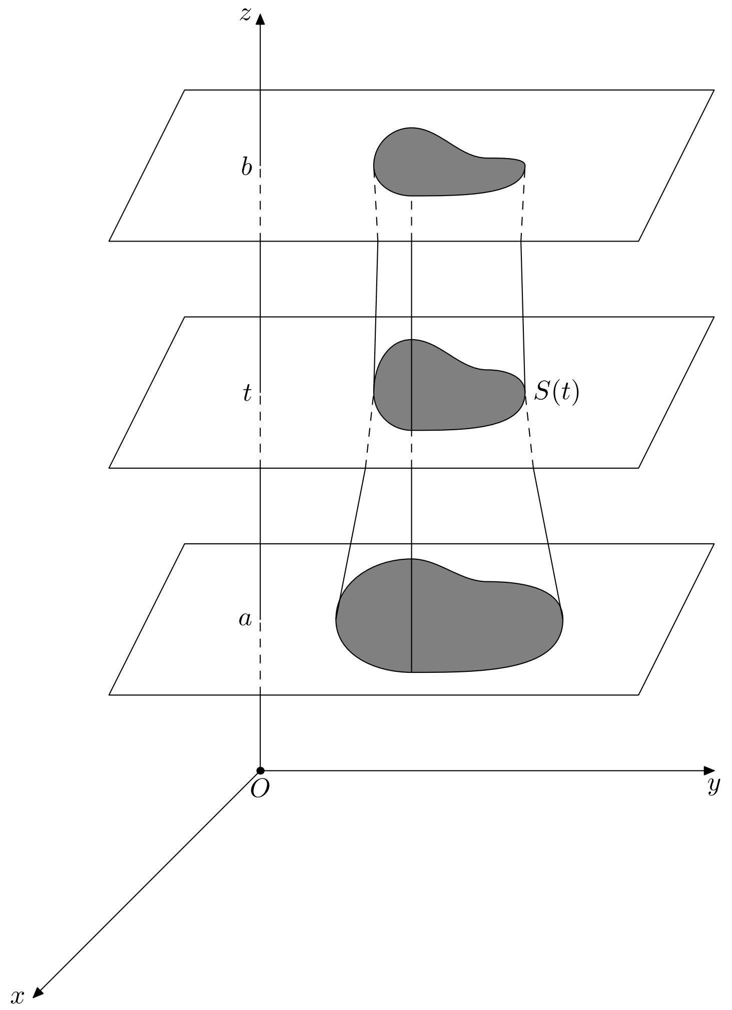
Théorème $_{8.1}$: Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$ telles que pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $g(x) \leqslant f(x)$.
L'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, la courbe représentative de f et la courbe représentative de g est calculée par :

$$\int_a^b (f(t) - g(t))\ \mathrm{d}t.$$

Exemple $_{14}$ *: Calculer l'aire (en unité d'aire) du domaine compris entre les courbes d'équations* $y = 2 - x^2$ *et* $y = (x-1)^2$.

Exemple $_{15}$ *: Soit un réel* α.
Calculer, suivant les valeurs de α*, l'aire* I_α *(en unité d'aire) du domaine compris entre l'axe des ordonnées, la droite d'équation* $x = \alpha$ *et les courbes d'équations* $y = \mathrm{e}{-x}$ *et* $y = \mathrm{e}^x$.
Interpréter graphiquement le nombre $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I_\alpha$.

8 - 2. Calcul de volume



Théorème 8.2 : L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$et l'unité de volume est le volume du cube construit sur (O,I,J,K).
On considère le solide limité par les plans parallèles d'équations : $z = a$ et $z = b$ $(a < b)$ et tel que l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = t$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ soit $\mathcal{S}(t)$ avec $\mathcal{S}$ fonction continue sur $[a\,;\,b]$. Le volume du solide est, en unité de volume :

$$V = \int_a^b \mathcal{S}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exemple 16 *: Soit $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$. Calculer l'aire de la surface délimitée par $\mathscr{C}$ et l'axe (xx') puis le volume engendré par la rotation de cette courbe autour de l'axe (xx').*

Exemple 17 *: Calculer le volume d'une sphère de rayon R.*

8 - 3. Distance parcourue en cinématique.

Théorème 8.3 : Si $v(t)$ est la vitesse instantanée d'un point mobile à l'instant t, alors la distance parcourue par ce mobile entre les instants a et b est égale à $\displaystyle\int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t$.

Exemple 18 *: Pour $t > 0$, la vitesse d'un mobile est $v(t) = \dfrac{1}{t}$ en $m \cdot s^{-1}$.*
Calculer la distance d_n parcourue entre les temps $t = 2^n$ et $t = 2^{n+1}$.