Corrigé du devoir surveillé n^o 2

PROBLEME N°1

Partie I : Point de vue géométrique

1. (a) $\vec{u} - \lambda\,\vec{d} = (x_1 - \lambda, \ldots, x_n - \lambda)$ donc $\vec{u} - \lambda\,\vec{d} \in H \iff \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - \lambda) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} x_k = n\,\lambda$.

   Ainsi, pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique valeur de λ pour laquelle $\vec{u} - \lambda\,\vec{d} \in H$:

$$\boxed{\vec{u} - \lambda\,\vec{d} \in H \iff \lambda = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

   (b) Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, on pose $\overrightarrow{u_H} = \vec{u} - \lambda\,\vec{d}$ où λ est la valeur déterminée à la question précédente, on a bien $\overrightarrow{u_H} \in H$ et $\vec{u} = \left(\vec{u} - \lambda\,\vec{d}\right) + \lambda\,\vec{d}$, par conséquent $\overrightarrow{u_D} = \lambda\,\vec{d}$ et c'est bien un vecteur de D.

2. Soit $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} = s(\vec{u}) = \underbrace{\left(\vec{u} - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\vec{d}\right)}_{\vec{u_H}} - \underbrace{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\vec{d}}_{\vec{u_D}}$

   Donc $\vec{v} = s(\vec{u})$ se décompose ainsi : $\vec{v} = \vec{v_H} + \vec{v_D}$ avec $\vec{v_H} = \vec{u_H}$ et $\vec{v_D} = -\vec{u_D}$, par conséquent
   $s \circ s(\vec{u}) = s(\vec{v}) = \vec{v_H} - \vec{v_D} = \vec{u_H} + \vec{u_D} = \vec{u}$
   Ceci est vérifié pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ donc

$$\boxed{s \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, \text{ donc } s \text{ est une symétrie.}}$$

3. En dimension 2, H a pour équation cartésienne $x_1 + x_2 = 0$, c'est donc une droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, -1)$.

4. (a) On vérifie aisément que tous les vecteurs de la famille $\mathcal{B}_H$ sont dans H et si on écrit la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs elle est échelonnée, donc la famille $\mathcal{B}_H$ est libre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Le cardinal de $\mathcal{B}_H$ est égal à $n-1$ donc H est de dimension au minimum $n-1$; or H n'est pas de dimension n, sinon il serait de même dimension que $\mathbb{R}^n$ donc égal à $\mathbb{R}^n$; par conséquent H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

   (b) La famille $\mathcal{B}_H$ est libre, $\vec{d}$ n'appartient pas à H donc pas à l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}_H$, par conséquent la famille $\mathcal{C} = \mathcal{B}_H \cup \{\vec{d}\}$ est encore libre ; elle est de cardinal n donc c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

   (c) Les vecteurs de $\mathcal{B}_H$ sont invariants par s et $s\left(\vec{d}\right) = -\vec{d}$ donc la matrice de s dans la base $\mathcal{C}$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II : un exemple de symétrie dans un espace de fonctions

1. Soit f une fonction continue définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} f \in F &\iff \exists (P, Q) \in \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = P(x) + Q(x)\,\ln x \\ &\iff \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\,x + b + (c\,x + d)\,\ln x \\ &\iff \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\,x + b + c\,x\,\ln x + d\,\ln x \\ &\iff f \in \mathrm{Vect}\langle f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4\rangle \end{aligned}$$

   Les fonctions f_1 à f_4 sont bien dans E, donc F est par construction le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions f_1 à f_4.

2. On vient de voir que la famille $\mathcal{B}$ engendre F, montrons à présent qu'elle est libre :
Soient $(a,\,b,\,c,\,d)\in\mathbb{R}^4$ tels que $a\,f_1+b\,f_2+c\,f_3+d\,f_4=0$ (fonction nulle définie pour $x>0$).)
On a $\forall x>0,\ a\,x+b+c\,x\,\ln x+d\,\ln x=0$.
Les fonctions f_1 à f_4 sont indéfiniment dérivables sur $]0,+\infty[$, donc aussi toutes les fonctions de F, ainsi on a également : $\forall x>0,\ a+c\,\ln x+c+\dfrac{d}{x}=0$ et $\dfrac{c}{x}-\dfrac{d}{x^2}=0$.
En particulier pour $x=1$ on obtient :
$$\begin{cases} a+b &= 0\\ a+c+d &= 0\\ c-d &= 0\end{cases}$$
Pour obtenir une quatrième équation, on peut évaluer la dérivée seconde en un autre point, 2 par exemple ce qui donne $\dfrac{c}{2}-\dfrac{d}{4}=0$, ou étudier une limite en $+\infty$ ou en 0 :
Par exemple avec la dérivée première, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a+c\,\ln x+c+\frac{d}{x}=0$, or cette limite est nulle si et seulement si $c=0$.
Finalement le système est de Cramer et la seule solution est $(a,\,b,\,c,\,d)=(0,\,0,\,0,\,0)$, en conclusion :

$$\boxed{\mathcal{B}\text{ est une famille libre de }E\text{ et engendre }F\text{, c'est donc une base de }F}$$

3. (a) On montre dans un premier temps que φ est linéaire : soient (f,g) deux fonctions de F et $\lambda\in\mathbb{R}$,
$\forall x>0,\ \varphi\,(f+\lambda\,g)\,(x)=x\,(f+\lambda\,g)\left(\dfrac{1}{x}\right)=x f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\lambda\,x\,g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\varphi\,(f)\,(x)+\lambda\,\varphi\,(g)\,(x)$
On en déduit : $\varphi\,(f+\lambda\,g)=\varphi\,(f)+\lambda\,\varphi\,(g)$

$$\boxed{\text{Cette égalité est vérifiée pour toutes fonctions } f \text{ et } g \text{ de } F \text{ et tout réel } \lambda \text{ donc } \varphi \text{ est linéaire}}$$

Ensuite on calcule les images par φ des vecteurs de $\mathcal{B}$:
   - ⋆ $\forall x>0,\ \varphi\,(f_1)\,(x)=x\times 1=x$, donc $\varphi\,(f_1)=f_2$.
   - ⋆ $\forall x>0,\ \varphi\,(f_2)\,(x)=x\times\dfrac{1}{x}=1$, donc $\varphi\,(f_2)=f_1$.
   - ⋆ $\forall x>0,\ \varphi\,(f_3)\,(x)=x\times\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-x\,\ln x$, donc $\varphi\,(f_3)=-f_4$.
   - ⋆ $\forall x>0,\ \varphi\,(f_4)\,(x)=x\times\dfrac{1}{x}\,\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$, donc $\varphi\,(f_4)=-f_3$.

On constate que les images par φ des vecteurs de $\mathcal{B}$ appartiennent à F, donc par linéarité de φ il en va de même pour toute fonction de F, on a donc prouvé que

$$\boxed{\varphi\text{ est un endomorphisme de }E}$$

(b) Les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ calculées précédemment permettent de conclure que $\mathcal{M}\,(\varphi,\mathcal{B})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$

(c) On vérifie facilement que $\mathcal{M}\,(\varphi,\mathcal{B})^2=I_4$ donc la matrice de s^2 relativement à $\mathcal{B}$ est la matrice identité ; ainsi $s\circ s=\mathrm{id}_E$ et s est bien une symétrie.

Partie III : matrice d'une symétrie dans une base adaptée

1. (a) Le calcul de $M^2=I_3$ suffit à prouver que f est bien une symétrie.

(b) $M+I_3=\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$ est de rang 2 et ses colonnes vérifient : $C_1+2\,C_2+C_3=0$ donc $\vec{e}_1+2\,\vec{e}_2+\vec{e}_3\in\ker\,(f+\mathrm{id}_E)$
$M-I_3=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\1&-2&1\end{pmatrix}$ est de rang 1 et ses colonnes vérifient : $C_1=-\frac{1}{2}\,C_2=C_3$ donc $\ker\,(f+\mathrm{id}_E)=\mathrm{Vect}\langle\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\,;\,\vec{e}_1-\vec{e}_3\rangle$; ainsi on peut choisir :

$$\boxed{\vec{a}_1=\vec{e}_1+2\,\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{a}_2=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{a}_3=\vec{e}_1-\vec{e}_3}$$

(c) La famille $\mathcal{C}$ est de cardinal 3 donc il suffit de montrer qu'elle est libre pour établir que c'est une base de E.
La famille $(\vec{a}_2,\, \vec{a}_3)$ est une base de $\ker(f+\mathrm{id}_E)$ donc elle est libre ; d'autre part $\vec{a}_1 \notin \ker(f+\mathrm{id}_E)$ donc $\vec{a}_1 \notin \mathrm{Vect}\langle \vec{a}_2,\, \vec{a}_3\rangle$ par conséquent la famille $(\vec{a}_1,\, \vec{a}_2,\, \vec{a}_3)$ est libre.
On a vu que $\vec{a}_1 \in \ker(f+\mathrm{id}_E)$ donc $f(\vec{a}_1) = -\vec{a}_1$, de même $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$ appartiennent à $\ker(f-\mathrm{id}_E)$ donc $f(\vec{a}_2) = \vec{a}_2$ et $f(\vec{a}_3) = \vec{a}_3$ donc la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Une matrice P qui convient est la matrice de passage des vecteurs $\vec{a}_1,\, \vec{a}_2,\, \vec{a}_3$ exprimés dans la base $(\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3)$: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
On montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P\, D^n P^{-1}$

2. (a) Soit $\vec{u} \in F \cap G$: $\vec{u} \in F$ donc $s(\vec{u}) = \vec{u}$ et $\vec{u} \in G$ donc $s(\vec{u}) = -\vec{u}$, ainsi $\vec{u} = -\vec{u}$ donc $\vec{u} = \vec{0}$.
On en déduit

$$\boxed{F \cap G = \{\vec{0}_E\}}$$

(b) Supposons que le couple $(\vec{v},\, \vec{w})$ tel qu'il est défini existe, on a $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, puis en composant par s : $s(\vec{u}) = s(\vec{v}) + s(\vec{w}) = \vec{v} - \vec{w}$, la résolution du système ainsi obtenu donne $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} + s(\vec{u})}{2}$ et $\vec{w} = \dfrac{\vec{u} - s(\vec{u})}{2}$.

(c) Le calcul précédent prouve qu'il existe un seul couple solution possible, reste à vérifier qu'il convient effectivement, c'est à dire que $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} + s(\vec{u})}{2}$ est bien un vecteur de F et que $\vec{w} = \dfrac{\vec{u} - s(\vec{u})}{2}$ appartient à G
$s(\vec{v}) = s\left(\dfrac{\vec{u} + s(\vec{u})}{2}\right) = \dfrac{s(\vec{u}) + \vec{u}}{2} = \vec{v}$, donc $\vec{v} \in F$; de même $s(\vec{w}) = s\left(\dfrac{\vec{u} - s(\vec{u})}{2}\right) = \dfrac{s(\vec{u}) - \vec{u}}{2} = -\vec{w}$, donc $\vec{w} \in G$

(d) Soit $\vec{u} \in E$, on le décompose comme précédemment en $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, puis on exprime $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ respectivement. $\vec{u}$ apparait alors comme combinaison linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ réunis.
On en déduit $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ engendre E.
Montrons à présent que cette famille est libre, pour cela on résout dans $\mathbb{K}^{p+q}$:
$\alpha_1\, \vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \alpha_p\, \vec{\varepsilon}_p + \alpha_{p+1}\, \vec{\varepsilon}_{p+1} + \cdots + \alpha_{p+q}\, \vec{\varepsilon}_{p+q} = \vec{0}_E$
$\alpha_1\, \vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \alpha_p\, \vec{\varepsilon}_p = -\alpha_{p+1}\, \vec{\varepsilon}_{p+1} - \cdots - \alpha_{p+q}\, \vec{\varepsilon}_{p+q}$
Le membre de gauche est un vecteur de F, celui de droite un vecteur de G, or ils sont égaux donc appartiennent à $F \cap G$ qui est réduit au vecteur nul ; ainsi :
$\alpha_1\, \vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \alpha_p\, \vec{\varepsilon}_p = \vec{0}_E$ et $-\alpha_{p+1}\, \vec{\varepsilon}_{p+1} - \cdots - \alpha_{p+q}\, \vec{\varepsilon}_{p+q} = \vec{0}_E$
Comme les familles $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont libres en tant que bases de F et de G, on obtient $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{p+q} = 0$ ce qui montre que la famille $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est libre.

$\boxed{\textbf{PROBLEME N°2}}$

1. Préliminaires
   (a) $\forall \vec{u} \in E,\ \theta(\vec{u}) = \vec{0}$, donc tout vecteur de E appartient au noyau de θ ; ainsi $\ker(\theta) = E$ et $\operatorname{Im}(\theta) = \{\vec{0}\}$.
   (b) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\vec{u} \in \ker(g)$; on a donc $g(\vec{u}) = \vec{0}$. Comme g est linéaire, $g^2(\vec{u}) = g\big(g(\vec{u})\big) = g(\vec{0}) = \vec{0}$, d'où $\vec{u} \in \ker(g^2)$. Ainsi $\forall \vec{u} \in E,\ \vec{u} \in \ker(g) \Longrightarrow \vec{u} \in \ker(g^2)$, d'où $\ker(g) \subset \ker(g^2)$.
   De même, soit $\vec{u} \in \ker(g^2)$, donc $g^2(\vec{u}) = \vec{0}$. Comme g est linéaire, $g^3(\vec{u}) = g\big(g^2(\vec{u})\big) = g(\vec{0}) = \vec{0}$, d'où $\vec{u} \in \ker(g^3)$ et $\ker(g^2) \subset \ker(g^3)$.
   On a donc prouvé que $\boxed{\forall g \in \mathscr{L}(E),\ \ker(g) \subset \ker(g^2) \subset \ker(g^3)}$

   Soit à présent $\vec{v} \in \operatorname{Im}(g^3)$; il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = g^3(\vec{u})$. Notons $\vec{u}_1 = g(\vec{u})$, on a $\vec{v} = g^2(\vec{u}_1)$ donc $\vec{v} \in \operatorname{Im}(g^2)$. Ainsi $\forall \vec{v} \in E,\ \vec{v} \in \operatorname{Im}(g^3) \Longrightarrow \vec{v} \in \operatorname{Im}(g^2)$, d'où $\operatorname{Im}(g^3) \subset \operatorname{Im}(g^2)$.
   De même, soit $\vec{v} \in \operatorname{Im}(g^2)$, il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = g^2(\vec{u})$. Notons $\vec{u}_1 = g(\vec{u})$, on a $\vec{v} = g^(\vec{u}_1)$ donc $\vec{v} \in \operatorname{Im}(g)$. Ainsi $\forall \vec{v} \in E,\ \vec{v} \in \operatorname{Im}(g^2) \Longrightarrow \vec{v} \in \operatorname{Im}(g)$, d'où $\operatorname{Im}(g^2) \subset \operatorname{Im}(g)$.
   On a donc prouvé que $\boxed{\forall g \in \mathscr{L}(E),\ \operatorname{Im}(g) \supset \operatorname{Im}(g^2) \supset \operatorname{Im}(g^3)}$
   (c) • Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(g^2)$, montrons qu'alors $\operatorname{Im}(g^2) = \operatorname{Im}(g^3)$.
   Soit $\vec{v} \in \operatorname{Im}(g^2)$, il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = g^2(\vec{u})$, donc en posant $\vec{u}_1 = g(\vec{u})$, on obtient $\vec{v} = g(\vec{u}_1)$, avec $\vec{u}_1 \in \operatorname{Im}(g)$. Or $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(g^2)$, donc $\vec{u}_1 \in \operatorname{Im}(g^2)$. On en déduit qu'il existe $\vec{u}_2 \in E$ tel que $g^2(\vec{u}_2) = \vec{u}_1$, puis en composant par g, que $\vec{v} = g^3(\vec{u}_2)$, d'où $\vec{v} \in \operatorname{Im}(g^3)$. Tout vecteur de $\operatorname{Im}(g^2)$ appartient à $\operatorname{Im}(g^3)$, on a donc prouvé que $\operatorname{Im}(g^2) \subset \operatorname{Im}(g^3)$. D'après la question précédente, l'inclusion réciproque est toujours vraie, donc finalement $\operatorname{Im}(g^2) = \operatorname{Im}(g^3)$

   On peut donc conclure que $\boxed{\forall g \in \mathscr{L}(E),\ \operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(g^2) \Longrightarrow \operatorname{Im}(g^2) = \operatorname{Im}(g^3)}$

   • Soit à présent $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker(g) = \ker(g^2)$, montrons qu'alors $\ker(g^2) = \ker(g^3)$.
   Soit $\vec{u} \in \ker(g^3)$, c'est à dire $g^3(\vec{u}) = g^2\Big(g(\vec{u})\Big) = \vec{0}$. Posons $\vec{v}_1 = g(\vec{u})$; $\vec{v}_1 \in \ker(g^2)$. Or $\ker(g^2) = \ker(g)$, donc $\vec{v}_1 \in \ker(g)$. On en déduit que $g(\vec{v}_1) = g\Big(g(\vec{u})\Big) = \vec{0}$, donc $\vec{u} \in \ker(g^2)$. Tout vecteur de $\ker(g^3)$ appartient à $\ker(g^2)$, on a donc prouvé que $\ker(g^3) \subset \ker(g^2)$. D'après la question précédente, l'inclusion réciproque est toujours vraie, donc finalement $\ker(g^2) = \ker(g^3)$

   On peut donc conclure que $\boxed{\forall g \in \mathscr{L}(E),\ \ker(g) = \ker(g^2) \Longrightarrow \ker(g^2) = \ker(g^3)}$

2. (a) $\dim\big(\operatorname{Im}(f^2)\big) = 0 \iff f^2 = \theta$; or $f^2 \neq \theta$ donc $\dim\big(\operatorname{Im}(f^2)\big) \geqslant 1$. La formule du rang nous permet alors de conclure que $\dim\big(\ker(f^2)\big) \leqslant 3$.
   (b) Soit $\vec{v} \in \operatorname{Im}(f^2)$, il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = f^2(\vec{u})$; on en déduit $f(\vec{v}) = f^3(\vec{u}) = \vec{0}$ puisque $f^3 = \theta$, donc $\vec{v} \in \ker(f)$. Ainsi $\operatorname{Im}(f^2) \subset \ker(f)$, et d'après les inclusions de noyaux établies à la question 1b, $\boxed{\operatorname{Im}(f^2) \subset \ker(f) \subset \ker(f^2)}$
   Pour prouver $\ker(f) \neq \ker(f^2)$, on raisonne par l'absurde : supposons $\ker(f) = \ker(f^2)$, alors d'après la question 1c, $\ker(f^2) = \ker(f^3)$, et comme $f^3 = \theta$, il vient $\ker(f) = \ker(f^2) = \ker(f^3) = E$, ce qui est absurde étant donné que $\dim\big(\ker(f^2)\big) \leqslant 3$.

   On a donc prouvé $\boxed{\operatorname{Im}(f^2) \subset \ker(f) \subsetneq \ker(f^2)}$
   (c) Les inclusions ci dessus entrainent : $1 \leqslant \dim\big(\operatorname{Im}(f^2)\big) \leqslant \dim\big(\ker(f)\big) < \dim\big(\ker(f^2)\big) \leqslant 3$ donc $\operatorname{Im}(f^2)$ et $\ker(f)$ sont de dimension 1 ou 2.
   premier cas : $\dim\big(\operatorname{Im}(f^2)\big) = 1$; dans ce cas $\dim\big(\ker(f^2)\big) = 3$ (formule du rang), donc $\ker(f)$ peut être de dimension 1 ou 2.
   deuxième cas : $\dim\big(\operatorname{Im}(f^2)\big) = 2$; alors $2 = \dim\big(\operatorname{Im}(f^2)\big) \leqslant \dim\big(\ker(f)\big) \leqslant 2$, donc $\dim\big(\operatorname{Im}(f^2)\big) = \dim\big(\ker(f)\big) = 2$.
   (d) i. Φ est bien à valeurs dans $\operatorname{Im}(f^2)$, et f étant linéaire, la linéarité de Φ est *induite* par celle de f. En effet, pour tous $\vec{v}$, $\vec{w}$ appartenant à $\operatorname{Im}(f)$ et tout réel λ, on a :
   $\Phi(\lambda\,\vec{v} + \vec{w}) = f(\lambda\,\vec{v} + \vec{w})$ car $\lambda\,\vec{v} + \vec{w} \in \operatorname{Im}(f)$

$= \lambda\, f(\vec{v}) + f(\vec{w})$ par linéarité de f
$= \lambda\, \Phi(\vec{v}) + \Phi(\vec{w})$ car $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$.

Soit $\vec{v} \in \ker(\Phi)$, on a $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\Phi(\vec{v}) = f(\vec{v})$; or $\Phi(\vec{v}) = \vec{0}$, donc $f(\vec{v}) = \vec{0}$ et $\vec{v} \in \ker(f)$. Ceci démontre que $\ker(\Phi) \subset \ker(f)$.

ii. On sait que $f^2 \neq \theta$, donc il existe $\vec{u} \in E$ tel que $f^2(\vec{u}) \neq \vec{0}$. Posons $\vec{v} = f(\vec{u})$: $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\Phi(\vec{v}) = f(\vec{v}) = f^2(\vec{u}) \neq \vec{0}$. On en conclut que Φ n'est pas l'application nulle. Donc $\mathrm{Im}(\Phi)$ est de dimension supérieure ou égale à 1, mais comme $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathrm{Im}(f^2)$ qui est de dimension 1 par hypothèse, on obtient $\dim\big(\mathrm{Im}(\Phi)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(f^2)\big) = 1$.

iii. Le théorème du rang appliqué à Φ donne :
$\dim\big(\ker(\Phi)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(\Phi)\big) = 3 - 1 = 2.$

iv. On a montré précédemment que $\ker(\Phi) \subset \ker(f)$, mais $\ker(f)$ est de dimension 1, donc $\ker(\Phi)$ ne peut être de dimension 2.

(e) $\ker(f)$ étant de dimension 2, on obtient par la formule du rang que $\mathrm{Im}(f)$ est aussi de dimension 2. Par conséquent $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(f^2)\big)$, mais comme on a montré précédemment (question 1b) que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$, cela entraine $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. L'implication prouvée question 1c donne alors $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f^3)$, ce qui est impossible puisque $\mathrm{Im}(f^3) = \{\vec{0}\}$.

(f) Les deux cas étudiés ci-dessus aboutissent à des contradictions, la seule possibilité est donc $\dim\big(\mathrm{Im}(f^2)\big) = 1$ et $\dim\big(\ker(f)\big) = 2 = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

3. (a) $\vec{\imath}$ existe puisque par hypothèse $f^2 \neq \theta$. De plus $f^2(\vec{\imath}) \in \ker(f)$ mais n'engendre pas $\ker(f)$ qui est de dimension 2. Il existe donc un vecteur $\vec{\ell}$ appartenant à $\ker(f) \setminus \mathrm{Vect}\langle f^2(\vec{\imath})\rangle$, c'est à dire tel que la famille $\langle f^2(\vec{\imath}), \vec{\ell}\rangle$ est libre.

(b) i. Soient α, β, γ, δ des réels tels que $\alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath} + \gamma\,\vec{k} + \delta\,\vec{\ell} = \vec{0}$
on compose par f : $\alpha \underbrace{f(\vec{\imath})}_{\vec{\jmath}} + \beta \underbrace{f(\vec{\jmath})}_{f^2(\vec{\imath})=\vec{k}} + \gamma \underbrace{f(\vec{k})}_{f^3(\vec{\imath})=\vec{0}} + \delta \underbrace{f(\vec{\ell})}_{\vec{0} \text{ car } \vec{\ell}\in\ker(f)} = \vec{0} = \alpha\,\vec{\jmath} + \beta\,\vec{k}\ (\star)$
on compose à nouveau par f : $\alpha\,\vec{k} = \vec{0}$; comme $\vec{k} \neq \vec{0}$, on en déduit $\alpha = 0$
on reporte dans $(\star)$: $\beta\,\vec{k} = \vec{0}$, donc $\beta = 0$; et enfin dans l'égalité de départ : $\gamma\,\vec{k} + \delta\,\vec{\ell} = \vec{0}$, et comme la famille $\langle \vec{k}, \vec{\ell}\rangle$ est libre, $\gamma = \delta = 0$.

On a prouvé : $\forall(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4,\quad \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath} + \gamma\,\vec{k} + \delta\,\vec{\ell} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, donc la famille $\langle f^2(\vec{\imath}), \vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\ell}\rangle$ est libre ; E étant de dimension 4, c'est une base de E.

ii. La matrice de f dans cette base est

$$\begin{array}{c} \\ \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \\ \vec{\ell} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) & f(\vec{k}) & f(\vec{\ell}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$