Corrigé du devoir n^o 4

Partie 1

1. Soient $X = {}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $A\,X = \lambda\,X \iff \begin{cases} 2\,y + z = 4\,\lambda\,x \\ 2\,x + z = 4\,\lambda\,y & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2\,x + 2\,y + 2\,z = 4\,\lambda\,z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2\,y + z = 4\,\lambda\,x \\ 2\,x + 2\,y + 2\,z = 4\,\lambda\,(x+y) \\ 2\,x + 2\,y + 2\,z = 4\,\lambda\,z & L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,y + z = 4\,\lambda\,x \\ 2\,x + 2\,y + 2\,z = 4\,\lambda\,(x+y) \\ \lambda\ (\text{x} + \text{y - z}) = 0 \end{cases}$

• Pour $\lambda \neq 0$, le système S_λ équivaut à $\begin{cases} (1-4\,\lambda)\,x + 3\,y = 0 \\ 3\,x + (1-4\,\lambda)\,y = 0 \\ x + y = z \end{cases}$

Le système constitué des deux premières équations n'est de pas Cramer si et seulement si son déterminant est nul c'est à dire : $(1-4\,\lambda)^2 - 9 = 0 = (1-4\,\lambda+3)\,(1-4\,\lambda-3)$.

Donc pour $\lambda \in \left\{1\,,\,-\frac{1}{2}\right\}$, S_λ admet une infinité de solutions.

• Pour $\lambda = 0$, le système S_0 se ramène aux deux premières équations donc admet également une infinité de solutions.

En conclusion :

⋆ Si $\lambda \notin \left\{0\,,\,1\,,\,-\frac{1}{2}\right\}$, alors $A\,X = \lambda\,X \iff X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

⋆ $A\,X = 0 \iff 2\,x + y = 2\,x + z = 0.$

⋆ $A\,X = X \iff \begin{cases} -4\,x + 2\,y + z = 0 \\ 2\,x - 4\,y + z = 0 \end{cases} \iff z = 2\,x = 2\,y.$

⋆ $A\,X = -\frac{1}{2}\,X \iff \begin{cases} 2\,x + 2\,y + z = 0 \\ 2\,x + 2\,y + 4\,z = 0 \end{cases} \iff y = -x$ et $z = 0.$

2. On en déduit que $\text{Spec}(A) = \left\{0\,,\,1\,,\,-\frac{1}{2}\right\}$ et les espaces propres associés :

$$\boxed{E_0 = \text{Vect}\langle {}^t(1\,,\,1\,,\,-2)\rangle\ ,\ E_1 = \text{Vect}\langle {}^t(1\,,\,1\,,\,2)\rangle\ ,\ E_{-1/2} = \text{Vect}\langle {}^t(1\,,\,-1\,,\,0)\rangle}$$

3. La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à 3 donc A est diagonalisable (ou bien A admet 3 valeurs propres distinctes).

4. (a) $\overrightarrow{I}$, $\overrightarrow{J}$ et $\overrightarrow{K}$ sont trois vecteurs appartenant respectivement à E_0, $E_{-1/2}$ etE_1 donc ils forment une famille libre (cours) ; cette famille est de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Les colonnes de la matrice de passage sont les vecteurs $\overrightarrow{I}$, $\overrightarrow{J}$ et $\overrightarrow{K}$ exprimés dans la base canonique donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) D est la matrice diagonale semblable à A avec P comme matrice de passage, donc $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. (a) $A = P\,D\,P^{-1}$ donc on montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

(b) P^{-1} peut s'obtenir en résolvant le système $P\,X = Y$ où $X = {}^t(x,y,z)$ et $Y = {}^t(a,b,c)$.

$\begin{cases} x + y + z = a \\ x - y + z = b \\ -2\,x + 2\,z = c \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x + 2\,z = a + b \\ -2\,x + 2\,z = c \\ 2\,y = a - b \end{cases} \iff \begin{cases} 4\,x = a + b - c \\ 2\,y = a - b \\ 4\,z = a + b + c \end{cases}$

donc $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On en déduit $A^n = P\,D^n\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 - 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 \\ 1 - 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Partie II

1. $\text{rg}(B_{11} - \lambda I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} 6-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 6-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 + (\lambda - 6)\,L_1 \end{matrix}$

   $= \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda - 2 \\ 0 & 2\,\lambda - 10 & -\lambda^2 + 10\,\lambda - 22 \end{pmatrix}$

   On remarque que pour $\lambda = 2$ la matrice est de rang 2 *(la deuxième ligne est nulle et les deux autres ne sont pas proportionnelles)* et pour $\lambda \neq 2$ elle a même rang que $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4-\lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2\,\lambda - 10 & -\lambda^2 + 10\,\lambda - 22 \end{pmatrix}$

   On détermine le rang de la sous-matrice $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2\,\lambda - 10 & -\lambda^2 + 10\,\lambda - 22 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut $-\lambda^2 + 12\,\lambda - 32$.

   Ainsi C_1 est inversible si et seulement si $-\lambda^2 + 12\,\lambda - 32 \neq 0$ c'est à dire si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{4\,;\,8\}$.

   En conclusion $B_{11} - \lambda\,I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{2\,,\,4\,,\,8\}$ et pour $\lambda \in \{2\,,\,4\,,\,8\}$, le rang de $B_{11} - \lambda\,I_3$ est égal à 2.

2. λ est valeur propre de B_{11} si et seulement si $B_{11} - \lambda\,I_3$ n'est pas inversible, donc B_{11} admet comme valeurs propres : $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 8$.

3. • Calcul de $E_1 = \text{Ker}(B_{11} - 2\,I_3)$: $B_{11}\,X = 2\,X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 2\,z & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -z \end{array}\right.$

   • Calcul de $E_2 = \text{Ker}(B_{11} - 4\,I_3)$: $B_{11}\,X = 4\,X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & & & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & + & 2\,y & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & -x \end{array}\right.$

   • Calcul de $E_3 = \text{Ker}(B_{11} - 8\,I_3)$: $B_{11}\,X = 8\,X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & + & 2\,y & - & 4\,z & = & 0 \end{array}\right. \iff x = y = z$

   $$\boxed{E_1 = \text{Vect}\langle {}^t(0\,,\,-1\,,\,1)\rangle\ ,\ E_2 = \text{Vect}\langle {}^t(-1\,,\,1\,,\,1)\rangle\ ,\ E_3 = \text{Vect}\langle {}^t(1\,,\,1\,,\,1)\rangle}$$

4. Les vecteurs déterminés à la question précédente comme bases respectivement de E_1, E_2 et E_3 conviennent.

5. On constate que les deux derniers vecteurs de la base canonique sont des vecteurs propres pour la valeur 10, donc l'espace propre associé à 10 est de dimension au moins deux.

6. Les deux dernières équations de $B\,\overrightarrow{U} = \lambda\,\overrightarrow{U}$ sont : $3\,y + 10\,t = \lambda\,t$ et $3\,z + 10\,u = \lambda\,u$, les 3 premières équations ne font pas intervenir t et u donc se traduisent alors matriciellement par $B_{11}\,\overrightarrow{u} = \lambda\,\overrightarrow{u}$, où $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$. Ainsi $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de B_{11} associé à l'une des valeurs propres de B_{11}.

7. D'après la question 6, les deux dernières équations donnent $3\,y + (10 - \lambda)\,t = 3\,z + (10 - \lambda)\,u = 0$ donc :

   $\star$ pour $\lambda = 2$: $\overrightarrow{U_1} =^t (0\,,\,-8\,,\,8\,,\,3\,,\,-3)$

   $\star$ pour $\lambda = 4$: $\overrightarrow{U_2} =^t (-2\,,\,2\,,\,2\,,\,-1\,,\,-1)$

   $\star$ pour $\lambda = 8$: $\overrightarrow{U_3} =^t (2\,,\,2\,,\,2\,,\,-3\,,\,-,3)$

8. La matrice B admet donc 4 valeurs propres réelles : 2, 4, 8, 10 ; 0 n'est pas valeur propre donc B est inversible.

   Les dimensions des sous-espaces propres associés sont respectivement 1, 1, 1, 2, la somme des dimensions est égale à 5 donc B est diagonalisable.

9. B est semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ avec comme matrice de passage $Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   La matrice Q est composée par blocs de la matrice de passage de B_{11}, de I_2 et de deux matrices de même formats que B_{12} et B_{21} ; son inverse se calcule par blocs ainsi que $B^n = Q \times \Delta^n \times Q^{-1}$.

Partie III

1. Les événements $[X_n = 1]$, $[X_n = 2]$, $[X_n = 3]$ forment un système complet donc on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)\underbrace{P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)}_{0} + P(X_n = 2)\underbrace{P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1)}_{1/2} + P(X_n = 3)\underbrace{P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 1)}_{1/4}$.
soit $p_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,q_n + \dfrac{1}{4}\,r_n$; de même pour $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$:
$P(X_{n+1} = 2) = P(X_n = 1)\underbrace{P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 2)}_{1/2} + P(X_n = 2)\underbrace{P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 2)}_{0} + P(X_n = 3)\underbrace{P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 2)}_{1/4}$.
$P(X_{n+1} = 3) = P(X_n = 1)\underbrace{P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)}_{1/2} + P(X_n = 2)\underbrace{P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 3)}_{1/2} + P(X_n = 3)\underbrace{P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 3)}_{1/2}$.
soit $q_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,p_n + \dfrac{1}{4}\,q_n$ et $r_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,p_n + \dfrac{1}{2}\,q_n + \dfrac{1}{2}\,r_n$ Ces trois relations s'écrivent matriciellement :
$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ c'est à dire $Y_{n+1} = A\,Y_n$ où A est la matrice de la partie I.
2. À chaque instant, quelle que soit la position du mobile, la probabilité qu'il aille au sommet 3 à l'instant suivant est égale à $\frac{1}{2}$, donc $P(X_n = 3) = \frac{1}{2}$.
3. On montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = A^n\,Y_0$ où $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:
   - $n = 0$: évident car $A^n = I_3$, de même pour $n = 1,\ ; Y_1 = A\,Y_0$ par définition.
   - soit $n \geqslant 0$, supposons $Y_n = A^n\,Y_0$; comme $Y_{n+1} = A\,Y_n$ on obtient $Y_{n+1} = A\,Y_{n+1} = A \times A^n\,Y_0 = A^{n+1}\,Y_0$

   La propriété est héréditaire et par conséquent, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Le calcul de A^n effectué partie I donne alors $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 \\ 1-2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$
$\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 1-2\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 2 \end{pmatrix}$ Il en résulte :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = 1) = \frac{1}{4} - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1},\ P(X_n = 2) = \frac{1}{4} + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1},\ P(X_n = 3) = \frac{1}{2}}$$

Partie IV

1. La particule reste au sommet 4 ou 5 si elle s'y trouve déjà, donc $a_{4,4} = a_{5,5} = 1$ et $a_{4,5} = a_{5,4} = 0$.
2. $\star$ Supposons $X_0 = 1$ (la particule est en 1 au départ) : les événements $[X_1 = 1]$, $[X_1 = 2]$ et $[X_1 = 3]$ forment un système complet. On applique la formule des probabilités totales :
$a_{14} = a_{14} \times P_{[X_0=1]}(X_1 = 1) + a_{24} \times P_{[X_0=1]}(X_1 = 2) + a_{34} \times P_{[X_0=1]}(X_1 = 3)$ c'est à dire :
$a_{14} = 0,6\,a_{14} + 0,2\,a_{24} + 0,2\,a_{34}$
$\star$ De même si $X_0 = 2$, les événements $[X_1 = 1]$, $[X_1 = 2]$, $[X_1 = 3]$ et $[X_1 = 4]$ forment un système complet ; la formule des probabilités totales donne :
$a_{24} = a_{14} \times P_{[X_0=2]}(X_1 = 1) + a_{24} \times P_{[X_0=2]}(X_1 = 2) + a_{34} \times P_{[X_0=2]}(X_1 = 3) + a_{44} \times P_{[X_0=2]}(X_1 = 4)$ donc :
$a_{24} = 0,1\,a_{14} + 0,4\,a_{24} + 0,2\,a_{34} + 0,3$
$\star$ Enfin si $X_0 = 3$, les événements $[X_1 = 1]$, $[X_1 = 2]$, $[X_1 = 3]$ et $[X_1 = 5]$ forment un système complet ; la formule des probabilités totales donne :
$a_{34} = a_{14} \times P_{[X_0=3]}(X_1 = 1) + a_{24} \times P_{[X_0=3]}(X_1 = 2) + a_{34} \times P_{[X_0=3]}(X_1 = 3) + a_{54} \times P_{[X_0=3]}(X_1 = 5)$ donc :
$a_{34} = 0,1\,a_{14} + 0,2\,a_{24} + 0,4\,a_{34} + 0$

On obtient bien le système annoncé, qui est équivalent à :

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ x - 6y + 2z = -3 & L_2 \leftarrow 4L_2 + L_1 \\ x + 2y - 6z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 2y - 2z = -3 \\ \quad - 22y + 10z = -12 \\ \quad 8y - 8z = 3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3/2 \\ y - z = 3/8 \\ y = 11/16 \end{cases}$$ donc l'unique triplet solution est : $(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{11}{16}, \dfrac{5}{16}\right)$

3. (a) La particule atteint le sommet 4 pour la première fois après le n^e saut sachant que $X_0 = i$ si et seulement si elle est au sommet 2 après le $n-1^e$ puis saute en 4 au n^e.

Pour $X_0 = i$, les probabilités d'arrivée aux différents sommets au bout de n sauts sont les composantes du produit $\left(\frac{B}{10}\right)^n$ par le vecteur colonne ayant une unique coordonnée non nulle égale à 1 en i^e ligne.
La deuxième ligne donne donc la probabilité d'être au sommet 2 après le $n-1^e$ saut en partant
du sommet 1 : $\frac{1}{2} \times (0,8)^{n-1} - \frac{1}{2} \times (0,4)^{n-1}$
du sommet 2 : $\frac{1}{4} \times (0,8)^{n-1} + \frac{1}{4} \times (0,4)^{n-1} + \frac{1}{2} \times (0,2)^{n-1}$
du sommet 3 : $\frac{1}{4} \times (0,8)^{n-1} + \frac{1}{4} \times (0,4)^{n-1} - \frac{1}{2} \times (0,2)^{n-1}$
D'où la probabilité que la particule atteigne le sommet 4 pour la première fois après le n^e saut sachant

$$\boxed{\begin{array}{l} X_0 = 1 \;:\; \left(\frac{1}{2} \times (0,8)^{n-1} - \frac{1}{2} \times (0,4)^{n-1}\right) \times P_{X_{n-1}=2}(X_n = 4) = \dfrac{3}{20}\Big((0,8)^{n-1} - (0,4)^{n-1}\Big) \\ X_0 = 2 \;:\; \dfrac{3}{40}\Big((0,8)^{n-1} + (0,4)^{n-1} + 2\,(0,2)^{n-1}\Big) \\ X_0 = 3 \;:\; \dfrac{3}{40}\Big((0,8)^{n-1} + (0,4)^{n-1} - 2\,(0,2)^{n-1}\Big) \end{array}}$$

Notons $A_{1,4}(n)$ l'événement « Arriver en 4 pour la première fois après le n^e saut en partant de 1 » ; les $A_{4,1}(n)$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est l'événement « Être absorbé en 4 en partant de 1 » ; donc $a_{14} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P\big(A_{1,4}(n)\big) = \frac{3}{20}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big((0,8)^{n-1} - (0,4)^{n-1}\Big) = \frac{3}{20}\left(\frac{1}{1-0,8} - \frac{1}{1-0,4}\right) = \frac{1}{2}$.
Avec des notations similaires on a :

$$a_{24} = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big(A_{2,4}(n)\big) = \frac{3}{40}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big((0,8)^{n-1} + (0,4)^{n-1} + 2\,(0,2)^{n-1}\Big) = \frac{3}{40}\left(\frac{1}{1-0,8} + \frac{1}{1-0,4} + \frac{2}{1-0,2}\right) = \frac{11}{16}$$

$$a_{34} = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big(A_{3,4}(n)\big) = \frac{3}{40}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big((0,8)^{n-1} + (0,4)^{n-1} - 2\,(0,2)^{n-1}\Big) = \frac{3}{40}\left(\frac{1}{1-0,8} + \frac{1}{1-0,4} - \frac{2}{1-0,2}\right) = \frac{5}{16}$$

(b) On procède de même avec le sommet 5, en remarquant que pour être absorbé en 5 après le n^e saut il faut être en 3 après le $n-1^e$.
La symétrie du graphe entraine que les valeurs sont échangées pour les sommets 2 et 3 et conservées pour le sommet 1 ; cette symétrie se retrouve dans les coefficients de la matrice B^n.
On peut donc affirmer que $\boxed{a_{15} = a_{14} = \dfrac{1}{2}\;;\; a_{25} = a_{34} = \dfrac{5}{16}\;;\; a_{35} = a_{24} = \dfrac{11}{16}}$

(c) La probabilité d'être absorbé en partant du sommet 1 vaut $a_{15} + a_{14} = 1$, ainsi « Être absorbé en partant du sommet 1 » est un événement quasi certain.
De même $a_{25} + a_{24} = 1$ et $a_{35} + a_{34} = 1$ donc « Être absorbé en partant du sommet 2 » et « Être absorbé en partant du sommet 3 » sont aussi des événements quasi certains.
Donc quel que soit le point de départ, la particule est absorbée avec la probabilité 1.

(d) « Être absorbé en 4 » a pour probabilité $\frac{1}{3}\,(a_{14} + a_{24} + a_{34}) = \frac{1}{2}$ et sachant qu'on part du sommet 3, l'événement « Être absorbé » est quasi certain, donc la probabilité d'être parti de 3 sachant qu'on est absorbé en 4 est égale à $\dfrac{(1/3)\,a_{34}}{(1/2)} = \dfrac{2\,a_{34}}{3} = \dfrac{5}{24}$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; l'événement $[Z = n]$ est la réunion des deux événements « Arriver en 4 pour la première fois après le n^e saut en partant de 1 » et « Arriver en 5 pour la première fois après le n^e saut en partant de 1 » qui sont équiprobables et incompatibles, donc $P(Z = n) = 2 \times \dfrac{3}{20} \times \Big((0,8)^{n-1} - (0,4)^{n-1}\Big)$ et

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,P(Z = n) = \frac{3}{10}\sum_{n=1}^{+\infty} n\Big((0,8)^{n-1} - (0,4)^{n-1}\Big) = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{(1-0,8)^2} - \frac{1}{(1-0,4)^2}\right) = \frac{20}{3}$$