2 BCPST 1 & 2 — Samedi 12 décembre 2015

MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°3
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Il vous est d'autre part demandé dans ce devoir, de compléter plusieurs SCRIPTS écrits en `PYTHON` ***; il est inutile de recopier le script : vous devez simplement préciser le numéro de la ligne à compléter et donner votre réponse.***

Le problème se compose de trois parties largement indépendantes.

L'objet du problème est l'étude et la modélisation d'un procédé ultra-rapide de greffes de rosiers. Lorsqu'une greffe est opérée, on sait au bout d'une semaine si elle a pris ou non. On suppose que la probabilité qu'une greffe donnée prenne est constante, égale à $p \in]0,1[$. On notera $q = 1 - p$.
On veut greffer R rosiers où R est un entier supérieur ou égal à 1. Pour chacun d'entre eux, on opère une greffe. Chaque semaine, si la greffe ne prend pas, on recommence jusqu'à ce qu'elle prenne effectivement. On suppose que toutes ces expériences sont mutuellement indépendantes.

Pour tous entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, le coefficient « p parmi n » est noté $\binom{n}{p}$ et on rappelle que : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

partie I

1. On appelle G le nombre de greffes nécessaires à la prise de la greffe d'un rosier donné.

- Déterminer la loi de G, son espérance et sa variance.
- Compléter le script de ces deux fonctions de manière à simuler la variable aléatoire G. En d'autres termes, l'instruction `G=NBRE_GREFFES_UN_ROSIER(p)` affecte à `G` la valeur prise par l'aléa G pour un rosier donné .

```
1  from random import random
2  #*******************************
3  def GREFFE_UN_ROSIER(p):
4       Resultat = ____________________
5       return Resultat
6  #*******************************
7  def NBRE_GREFFES_UN_ROSIER(p):
8       RESULTAT_GREFFE = ___________
9       G=1
10      while RESULTAT_GREFFE = = ______________:
11           RESULTAT_GREFFE = __________________
12           G = ___________
13      return G
```

2. On greffe simultanément les R rosiers, qui seront numérotés de 1 à R. On désigne par X_k la variable aléatoire égale au nombre de greffes nécessaires à la prise de la greffe du rosier k, $1 \leqslant k \leqslant R$, et par X le nombre total de greffes nécessaires pour que les greffes prennent sur les R rosiers. Les variables aléatoires X_k sont évidemment indépendantes.

(a) Quelle est la loi de la variable X_k pour $1 \leqslant k \leqslant R$?

(b) Exprimer X en fonction des X_k, $1 \leqslant k \leqslant R$.

(c) Calculer l'espérance et la variance de X.

(d) Compléter en utilisant la fonction `NBRE_GREFFES_UN_ROSIER` le script suivant de sorte que la fonction `NBRE_GREFFES_R_ROSIERS` retourne la liste L des aléas $X_1, X_2, \cdots, X_R$ et la valeur de l'aléa X pour R rosiers donnés .

```
def NBRE_GREFFES_R_ROSIERS(R,p):
    L = ____________________
    X = ____________________
    for k in range(R):
        L[k] = ______________________
        X = ________________
    return L,X
```

(e) Compléter le listing du programme suivant qui doit pour $p = 0.4$, simuler 10000 « greffes de $R = 7$ rosiers » et fournir la moyenne et la variance de l'échantillon des 10000 valeurs de X obtenues.

```
p=0.4;R=7;
Somme = 0
Somme_Carres = 0
for k in range(10000):
    [L,X]=NBRE_GREFFES_R_ROSIERS(R,p)
    Somme = _____________
    Somme_Carres = _______________
Moyenne = __________________
Variance = ____________________;
print("Moyenne de l'échantillon : ",Moyenne)
print("Variance de l'échantillon : ",Variance)
```

(f) Lors de l'exécution du programme précédent, nous avons obtenu l'affichage suivant :

```
Moyenne de l'échantillon : 17.4211
Variance de l'échantillon : 26.06417479000004
```

Ces résultats sont-ils en adéquation avec les résultats obtenus à la question 2c ?

3. On se propose de chercher la loi de X.

(a) Déterminer $\mathscr{E}$ l'ensemble des valeurs entières susceptibles d'être prises par X.

(b) Soit n un entier quelconque de $\mathscr{E}$.

i. Soit $(x_1, \ldots, x_R)$ un R-uplet de $(\mathbb{N}^*)^R$ tel que $x_1 + \ldots + x_R = n$.
Exprimer $P\left(X_1 = x_1; \ldots; X_R = x_R\right)$ en fonction de p, q, n et R.

ii. On note (E) l'équation $x_1 + \ldots + x_R = n$ et $\alpha(R, n)$ le nombre de R-uplets $(x_1, \ldots, x_R)$ de $(\mathbb{N}^*)^R$ solutions de (E). A l'aide du résultat de la question précédente, montrer que :

$$P(X = n) = \alpha(R, n) p^R q^{n-R}$$

4. Obtention récursive de $\alpha(R, n)$

(a) Que valent $\alpha(1, n)$ et $\alpha(2, n)$ pour tout entier naturel n ?

(b) En déduire $\alpha(3, n)$ pour tout entier naturel au moins égal à 3 ?

(c) Le calcul devenant fastidieux, nous vous proposons de compléter le script suivant de la fonction `alpha` d'arguments `n` et `R` qui retourne la valeur de $\alpha(R, n)$

```
def alpha(R,N):
    if R == 1:
        return 1
    else:
        T = 0
        for k in range(1,N):
            T = ____________
        return T
```

Par exemple, l'exécution de l'instruction
`print("alpha(3,20)=",alpha(3,20),' ; ',"alpha(7,20)=",alpha(7,20))`
donne `alpha(3,20)=171 ; alpha(7,20)=27132`

5. On considère le segment $S = [0, n]$ gradué d'unité en unité de 0 à n. On partage S en R segments, non réduits à un point, dont les extrémités sont sur les graduations.

(a) Montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des solutions de (E) et l'ensemble des partages de S ainsi définis (on pourra s'aider d'un dessin).

(b) Montrer qu'on obtient un tel partage de S en choisissant $R-1$ points distincts de la graduation d'abscisses comprises entre 1 et $n-1$.

(c) En déduire $\alpha(R, n)$. Donner la loi de probabilité de X.

partie II

On se propose d'étudier le nombre Y de semaines nécessaires à la prise des greffes sur les R rosiers. Pour chaque rosier, le nombre de semaines nécessaires est égal au nombre de greffes nécessaires.
On a donc $Y = \max(X_1, \ldots, X_R)$, les variables X_k ayant été définies dans la partie I.

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

(a) Démontrer que $P(Y \leqslant n) = (1-q^n)^R$.

(b) En déduire $P(Y = n)$.

2. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Dans cette question, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = P(Z = n)$ et $v_n = P(Z > n)$.
Soit N un entier naturel non nul.

(a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer u_n en fonction de v_{n-1} et v_n.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - N v_N$.
En déduire que, si la série $\sum v_n$ converge, alors, la série $\sum n u_n$ converge.

(c) Exprimer v_N à l'aide d'un reste de la série de terme général u_n.

Montrer que, si la série $\sum nu_n$ converge, alors : $Nv_N \leqslant \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} nu_n$.

En déduire alors que la suite (Nv_N) converge et déterminer sa limite.

(d) En déduire que Z possède une espérance si et seulement si la série $\sum v_n$ converge et que, dans ce cas, $E(Z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Dans toute la suite de la partie II, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 1 - (1 - q^n)^R$.

3. (a) Donner un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) En déduire que $E(Y)$ existe et que $E(Y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(c) Calculer $E(Y)$ pour $R = 2$.

Dans les questions **4**, **5** et **6**, on cherche à déterminer un équivalent de $E(Y)$ lorsque R tend vers l'infini.

4. On considère la fonction f définie par : $\forall x \geqslant 0\,,\ f(x) = 1 - (1 - q^x)^R$.

(a) Démontrer que la fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

(b) Donner un équivalent de $f(x) - Rq^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(c) En déduire qu'il existe un réel A strictement positif tel que : $\forall x > A\,,\ f(x) \leqslant Rq^x$.

(d) Démontrer que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$.

On pose $L = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

(e) Montrer que : $\forall x \geqslant 0\,,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} q^x (1 - q^x)^k$.

(f) En déduire que $L = -\dfrac{1}{\ln(q)} \displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} \dfrac{1}{k+1}$.

5. On veut obtenir un encadrement de $E(Y)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que : $\forall x \in [n, n+1]\,,\ v_{n+1} \leqslant f(x) \leqslant v_n$.

(b) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{N} v_n \leqslant \int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x + 1$.

(c) En déduire que : $-\dfrac{1}{\ln(q)} \displaystyle\sum_{k=1}^{R} \dfrac{1}{k} \leqslant E(Y) \leqslant 1 - \dfrac{1}{\ln(q)} \sum_{k=1}^{R} \dfrac{1}{k}$.

6. (a) Démontrer que $\displaystyle\int_1^{R+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^R \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

(b) En déduire que $E(Y) \underset{R \to +\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(R)}{\ln(q)}$.

partie III

Dans cette partie, on étudie l'évolution du processus sur plusieurs semaines. Pour cela, on considère la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que Y_0 égale 0, et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, Y_n est le nombre de rosiers dont la greffe a pris à l'issue de la n-ième semaine. On considère enfin la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $Z_n = Y_{n+1} - Y_n$.

1. Que représente Z_n ?

2. Déterminer la loi de Y_1 ; donner son espérance et sa variance.

3. (a) Montrer que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$:

$$P(Y_{n+1} = \ell) = \sum_{m=0}^{\ell} P\left(Z_n = \ell - m \,/\, Y_n = m\right) P(Y_n = m) \qquad (*)$$

(b) Déterminer la loi conditionnelle de Z_n sachant $Y_n = m$, et vérifier qu'elle ne dépend pas de n.

4. (a) En déduire que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\ell \leqslant R$, on a :

$$P(Y_2 = \ell) = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{R-m}{\ell-m} p^{\ell-m} q^{R-\ell} \binom{R}{m} p^m q^{R-m}$$

(b) Vérifier que, pour tout $(\ell, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leqslant m \leqslant \ell \leqslant R$, on a :

$$\binom{R}{m}\binom{R-m}{\ell-m} = \binom{R}{\ell}\binom{\ell}{m}$$

(c) En déduire que $P(Y_2 = \ell) = \binom{R}{\ell} p^{\ell} \left(q^2\right)^{R-\ell} \sum_{m=0}^{l} \binom{\ell}{m} q^{\ell-m}$.

(d) Montrer que $P(Y_2 = \ell) = \binom{R}{\ell} \left(p(1+q)\right)^{\ell} \left(q^2\right)^{R-\ell}$, et en déduire que Y_2 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres en fonction de R et de q.

5. En utilisant la relation $(*)$, montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n suit la loi binomiale de paramètres R et $1 - q^n$.

6. Pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant R$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y_n = k)$.