2 BCPST 1 & 2 Samedi 26 septembre 2015

MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°1
Durée : 2 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Préliminaires

On appelle sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique et tangente hyperbolique les fonctions respectivement notées $\mathrm{sh}, \mathrm{ch}, \mathrm{th}$ et définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \ \mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$$

1. Vérifier que ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que leurs dérivées s'expriment simplement à l'aide des fonctions ch, sh et th.

2. Que vaut $\mathrm{ch}^2\,(x) - \mathrm{sh}^2\,(x)$?

3. Prouver les quelques propriétés algébriques suivantes :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\,, \qquad \begin{array}{l} \mathrm{sh}\,(x+y) = \mathrm{ch}\,(x)\,\mathrm{sh}\,(y) + \mathrm{ch}\,(y)\,\mathrm{sh}\,(x) \\ \mathrm{ch}\,(x+y) = \mathrm{ch}\,(x)\,\mathrm{ch}\,(y) + \mathrm{sh}\,(y)\,\mathrm{sh}\,(x) \\ \mathrm{th}\,(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x) \times \mathrm{th}(y)} \end{array}$$

Partie A : Définition d'une fonction

1. Étudier la fonction th (dérivabilité, variations, limites, courbe représentative).

2. Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
La réciproque de cette bijection est appelée argument tangente hyperbolique et notée argth.

3. Démontrer que cette fonction argth est impaire.

4. Démontrer que argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

5. Pour tout $x \in I$, exprimer $\mathrm{argth}\,(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Partie B : Etude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on s'intéresse aux fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles vérifiant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ g(2x) = \frac{2g(x)}{1 + (g(x))^2} \qquad (*)$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions de $(*)$.

2. Soit g une fonction solution de $(*)$. Quelles sont les valeurs possibles de $g(0)$?
3. Montrer que, pour tout réel t, on a l'encadrement : $-1 \leq \dfrac{2t}{1+t^2} \leq 1$. Que peut-on en déduire pour une fonction g solution de $(*)$?
4. Montrer que la fonction tangente hyperbolique est solution de $(*)$.

Partie C : Résolution de $(*)$ avec $g(0) = \pm 1$

Dans cette partie, on désigne par g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0, et vérifiant la relation $(*)$ de la partie B. On suppose de plus que $g(0) = 1$, et que g n'est pas une fonction constante. On considère $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) \neq g(0)$ et pour tout entier naturel n, on pose $u_n = g\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
2. Établir une relation entre u_n et u_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier les variations de (u_n) en fonction du signe de u_0.
3. En comparant les résultats des deux questions précédentes, aboutir à une contradiction.
4. Montrer qu'on aboutit également à une contradiction si on suppose que $g(0) = -1$.
5. Quelle est la conclusion de cette partie C ?

Partie D : Résolution de $(*)$ avec $g(0) = 0$

Dans cette partie, on désigne par g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0, et vérifiant la relation $(*)$ de la partie B. On suppose de plus que $g(0) = 0$.

1. En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que dans la partie C, démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ g(x) \in]-1, 1[$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose alors : $h(x) = \operatorname{argth}(g(x))$.
2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ h(2x) = 2h(x)$.
3. Démontrer que h est dérivable en 0.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Prouver la convergence et déterminer la limite de la suite (v_n) définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = \frac{h\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$$
5. En déduire que h est une fonction de la forme $x \mapsto \alpha x$ (où α est une constante réelle à déterminer).

Partie E : Conclusion

Faire la synthèse des parties précédentes, et déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, dérivables en 0 et vérifiant la relation $(*)$.

2 BCPST 1 & 2 Samedi 26 septembre 2015

INFORMATIQUE
Devoir surveillé n°1
Durée : 40 minutes

EXERCICE 1- (5 points) Nous vous proposons le script suivant :

```
def U(n):
    a,b,c=1,1,2
    if n==0:
        return c
    elif n==1:
        return b
    else:
        for k in range(n-2):
            a,b,c=3*a-6*b+2*c,a,b
        return a
```

Calculer U(4)

EXERCICE 2 - (5 points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = t^3 + t$.

- Indiquez pour quelle raison f est une bijection.
- Écrire le script d'une fonction notée `DESSIN` dont les arguments d'entrée sont `a` et `b` qui permette de représenter graphiquement f sur le segment $[a, b]$ et sa réciproque g sur le segment $[f(a), f(b)]$
- Écrire le script d'une fonction notée `Reciproquef` dont les arguments d'entrée sont `x` et `Epsilon` qui retourne une valeur approchée à `Epsilon` près de l'unique solution de l'équation $t^3 + t = x$.

EXERCICE 3 - (5 points)

Écrire le script d'une fonction notée `TiTi` d'argument entier `n` qui retourne la liste des quintuplets d'entiers naturels non nuls dont la somme vaut `n`.
En particulier après l'exécution de l'instruction `L=TiTi(12)`*, le quintuplet [1,3,6,1,1] est par exemple un des éléments de la liste L.*

EXERCICE 4 - (5 points)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

Nous admettrons les résultats suivants :

- Chaque équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ notée α_n
- $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha_n \leq 2$

Écrire le script d'une fonction notée `ToTo` d'argument entier `n` qui permette :

- d'obtenir et de différencier par la taille et la couleur les graphes de f_n et f_{n+1}
- de visulaliser les points d'abscisse 1 de ces deux courbes.
- qui retourne une valeur approchée au millième près par défaut de α_n.