2 BCPST 1 & 2 — Mardi 1er septembre 2015

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Durée : 2 heures 30

Exercice 1 :

a) $\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ et $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.

b) $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \sin^2(\theta)=\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ et $\cos^2(\theta)=\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$.

c) $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$.

d) $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 2 :

a) Le nombre complexe $Z=\dfrac{i\sqrt{3}-1}{i\sqrt{3}+1}$ a pour partie réelle $\frac{1}{2}$.

b) Le nombre complexe $Z=\dfrac{i\sqrt{3}-1}{i\sqrt{3}+1}$ est de module 1, un argument vaut $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{1}{Z}=\overline{Z}$.

c) Les solutions de l'équation $z^2=2i$ sont $z_1=1+i$ et $z_2=\overline{z_1}$.

d) Soit $\alpha\in]0,\pi[$. Les solutions de l'équation $z^2-2\sin(\alpha)z+1=0$ sont $\xi_1=e^{i\alpha}$ et $\xi_2=\overline{z_1}$.

Exercice 3 :

Soient $f:x\longmapsto\arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puis $g:x\longmapsto\sin(2\arcsin(x))$ et $h:x\longmapsto\arcsin(\sin x)$.

a) La fonction f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée f' est nulle sur $\mathbb{R}^*$.

b) La fonction f est constante sur $\mathbb{R}^*$.

c) Les fonctions g et $P:x\longmapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ coïncident sur l'intervalle $[-1,+1]$.

d) Les fonctions h et $Q:x\longmapsto x$ coïncident sur l'intervalle $[0,\pi]$.

Exercice 4 :

a) Soient X et Y deux v.a.r. (sur un même espace probabilisé) indépendantes. Si on pose $Z=2X+3Y+4$, alors $E(Z)=2E(X)+3E(Y)+4$ et $V(Z)=4V(X)+9V(Y)+16$.

b) On enlève une par une toutes les boules d'une urne contenant initialement 1 boule rouge et $n-1$ boules noires. Si X est la v.a.r. donnant le rang d'apparition de la boule rouge, alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et $E(X)=\dfrac{n+1}{2}$.

c) On pioche 5 cartes dans un jeu de 32 cartes traditionnel. Si Y est la v.a.r. donnant le nombre d'as obtenus, alors Y suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\dfrac{1}{8}$.

d) Soient X et Y deux v.a.r. (sur un même espace probabilisé). La covariance et le coefficient de corrélation vérifient les identités suivantes :

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{V(X)+V(Y)-V(X+Y)}{2}\quad\text{et}\quad\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)V(Y)}$$

EXERCICE 5 :
Soient $f : x \longmapsto e^{3x}\cos 2x$ puis $g : x \longmapsto e^{3x}\sin 2x$ et $h : x \longmapsto x\,\ln(3x^2+1)$.

a) La dérivée de f est $f' : x \longmapsto e^{3x}(3\cos 2x - 2\sin 2x)$.

b) Les fonctions f et g sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 6y' + 12y = 0$.

c) La dérivée première de h est $h' : x \longmapsto \ln(3x^2+1) + \dfrac{6x^2}{3x^2+1}$.

d) La dérivée seconde de h est $h'' : x \longmapsto \dfrac{18x(2x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$.

EXERCICE 6 :

a) $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}\,dt = \ln(e^x+1) - \ln(2)$, $\int_0^x \frac{1}{e^t+1}\,dt = \ln(e^x+1) - x + \ln(2)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{e^t+1}\,dt = \ln(2)$.

b) A l'aide du changement de variable $x = 2u+3$ (soit $u = \dfrac{x-3}{2}$), on trouve $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{u+1}{\sqrt{2u+3}}\,du = \frac{2}{3}$.

c) A l'aide d'une IPP, on obtient $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.

d) A l'aide du changement de variable $u = \sin(t)$, on trouve $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1+\sin(t)}\,dt = 1 - 2\ln(2)$.

EXERCICE 7 :
Soient u, v, w trois fonctions dont les DL au voisinage de 1, 1 et 3 aux ordres respectifs 2, 3 et 2 sont :

$$u(1+h) \underset{h\to 0}{=} 3+h+2h^2+o(h^2) \quad ; \quad v(1+h) \underset{h\to 0}{=} h+2h^2+h^3+o(h^3) \quad ; \quad w(3+h) \underset{h\to 0}{=} 1+h+2h^2+o(h^2)$$

Nécessairement :

a) $A(1+h) \underset{h\to 0}{=} 3+2h+4h^2+h^3+o(h^3)$ où A désigne la fonction qui à tout x associe $A(x) = u(x)+v(x)$

b) $B(1+h) \underset{h\to 0}{=} 3h+7h^2+7h^3+o(h^3)$ où B désigne la fonction qui à tout x associe $B(x) = u(x)\times v(x)$

c) $C(1+h) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{3} - \frac{1}{9}h - \frac{7}{27}h^2 + o(h^2)$ où C désigne la fonction qui à tout x associe $C(x) = \dfrac{1}{u(x)}$

d) $D(1+h) \underset{h\to 0}{=} 1+h+4h^2+o(h^2)$ où D désigne la fonction qui à tout x associe $D(x) = w\big(u(x)\big)$

EXERCICE 8 :
On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}$ et $g(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

a) On a les DL à l'ordre 3 en 0 suivants : $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+x^3+o(x^3)$ et $\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$.

b) Le DL à l'ordre 2 de f en 0 est donné par $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{3}{2}x^2+o(x^2)$ et la droite d'équation $y = x+1$ est la tangente à la courbe de f en 0.

c) On a $e^h \underset{h\to 0}{=} 1+h+\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{h^3}{3}+o(h^3)$ et $g\left(\dfrac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{h}+1+\dfrac{h}{2}+o(h^2)$.

d) La droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_g$ de g en $+\infty$ et $\mathcal{C}_g$ est localement au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 9 :

a) $\sin(h) \underset{h\to 0}{=} h + \frac{1}{6}h^3 + o(h^3)$ et $\cos(h) \underset{h\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}h^2 + o(h^3)$

b) $\frac{1}{1+h} \underset{h\to 0}{=} 1 - h + h^2 + o(h^2)$ et $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)$

c) $\arctan(h) \underset{h\to 0}{=} h - \frac{1}{3}h^3 + o(h^4)$ et $\exp(h) \underset{h\to 0}{=} 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + o(h^3)$

d) $\sqrt{1+h} \underset{h\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+h}} \underset{h\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2 + o(h^2)$

Exercice 10 :

On définit la suite $(u_n)_{n\in N}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in N\,, \quad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

a) Si jamais $(u_n)_{n\in N}$ converge, ce ne peut être que vers 2.

b) Pour tout $n \in N$, u_n existe et $u_n \leq 2$.

c) La suite $(u_n)_{n\in N}$ est croissante.

d) Pour tout $n \in N$, $0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \dfrac{2-u_n}{2\sqrt{3}}$.

Exercice 11 :

Nous disposons de huit plaques dont trois portent le chiffre 1, deux portent le chiffre 3, les trois autres portant les chiffres 5, 7, 8. Ces plaques sont mises dans un sac. Nous tirons une à une et au hasard les plaques de cette urne en disposant les plaques de la gauche vers la droite. À titre d'exemple le tirage suivant

$\boxed{8}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}$

a permis de composer le nombre de huit chiffres suivant : 81371135 qui est alors considéré comme le résultat de cette expérience.

a) Lors ce cette expérience, nous pouvons former exactement 6720 nombres distincts de 8 chiffres.

b) La probabilité d'obtenir un résultat avec trois 1 consécutifs vaut $\frac{1}{14}$.

c) La probabilité pour que les trois « 1 » sortent avant les deux « 3 » vaut : $\frac{1}{10}$

d) La probabilité que le résultat se termine par 1 vaut $\frac{3}{8}$.

Exercice 12 :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

b) $\sin(\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$ et $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$.

d) A l'aide d'un $DL_3(0)$, on obtient $\sin(2h) - 2\sin(h) \underset{h\to 0}{\sim} h^3$.

Exercice 13 :
Soit $X_1,\, X_2, \cdots ,\, X_{16}$ 16 variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ telle que :

$$\forall k \in \{1,\, 2, \cdots ,\, 16\}\,, \quad \mathrm{P}\left(X_k = 1\right) = 0,3 \;\text{ et }\; \mathrm{P}\left(X_k = 2\right) = 0,5 \;\text{ et }\; \mathrm{P}\left(X_k = 3\right) = 0,2.$$

Nous poserons $\overline{X} = \dfrac{X_1 +\, X_2 + \cdots + X_{16}}{16}$

a) L'espérance de X_1 vaut $0,9$ ainsi que celle de $\overline{X}$.

b) L'écart-type de X_1 vaut $0,7$.

c) L'écart-type de $\overline{X}$ vaut $0,7$.

d) La fonction de répartition de $\overline{X}$ prend exactement 32 valeurs.

Exercice 14 :
On pose $\overrightarrow{u_1} = (1,1,2)\,, \quad \overrightarrow{u_2} = (1,-1,0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_3} = (2,2,1)$

et on note

$$F = \left\{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x+y-z=0\right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x+y-4z=0\right\}$$

a) F est un sev de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

b) G est un plan vectoriel et $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de G.

c) La famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est de rang 3 et constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

d) L'intersection des espaces vectoriels F et G est l'espace $H =$Vect$(\overrightarrow{u_2})$.

Exercice 15 :
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ qui au couple (x,y) associe le couple $(4x+3y, x+2y)$.
Nous noterons id, l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ qui au couple (x,y) associe le couple (x,y).

a) Cette application f est linéaire et sa matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) f est bijective, mais $f - 5\,\mathrm{id}$ ne l'est pas.

c) Le vecteur $(3,1)$ appartient au noyau de $f - 5\,\mathrm{id}$.

d) $f - \mathrm{id}$ n'est pas injective et $(-1,1)$ appartient au noyau de $f - \mathrm{id}$.

Exercice 16 :
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathbb{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $\overrightarrow{u_1} = (1,1,-1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (-1,2,1)$ et $\overrightarrow{u_3} = (1,-2,0)$

a) f est donnée par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y+z, -4x+2y-2z, x+y+2z) \end{array}$.

b) Le rang de f vaut 2 et le noyau de f est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

c) L'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v} = (x,y)$ vérifiant $f\left(\overrightarrow{v}\right) = 3\overrightarrow{v}$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $\overrightarrow{u_2}$.

d) La famille $\mathcal{C} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de f dans $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.