Corrigé du devoir n^o 4

Partie 1

1. **Coefficient d'avarie**

   (a) L'événement $[T=n]$ est inclus dans $[T>n-1]$; plus précisément $[T>n-1]=[T=n]\cup[T>n]$.

   Donc $P_{[T>n-1]}(T=n)=\dfrac{P(T=n)}{P(T>n-1)}=\dfrac{P(T>n-1)-P(T>n)}{P(T>n-1)}$

   D'autre part $\forall n\in\mathbb{N},\ D(n)=1-F(n)=1-P(T>n)$, donc $P_{[T>n-1]}(T=n)=\dfrac{D(n-1)-D(n)}{D(n-1)}$

   (b) i. L'espérance de T est égale à $\frac{1}{p}$ (théorème du cours).

   ii. $\forall n\in\mathbb{N},\ D(n)=P(T>n)=(1-p)^n$; en effet :

   ⋆ On peut écrire $[T>n]=\displaystyle\bigcup_{k=n+1}^{+\infty}[T=k]$ qui est une réunion disjointe, puis

   $$P(T>n)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}p\,(1-p)^{k-1}=p\,(1-p)^n\sum_{k=n+1}^{+\infty}p\,(1-p)^{k-n-1}=p\,(1-p)^n\times\frac{1}{1-(1-p)}$$

   ⋆ On peut également interpréter l'événement $[T>n]$ comme une succession d'au moins n échecs (si on convient d'appeler *échec* le fait de ne pas tomber en panne entre deux instants consécutifs). Ces *échecs* étant mutuellement indépendants, on obtient directement $P(T>n)=(1-p)^n$.

   iii. En remplaçant dans l'expression de π_n, on a $\pi_n=\dfrac{(1-p)^{n-1}-(1-p)^n}{(1-p)^{n-1}}=\dfrac{(1-p)^{n-1}\big(1-(1-p)\big)}{(1-p)^{n-1}}$

   Donc finalement

   $$\boxed{E(T)=\frac{1}{p}\ ;\ D(n)=(1-p)^n\text{ et }\pi_n=p}$$

   (c) i. $\forall n\in\mathbb{N}^*\pi_n=\alpha=\dfrac{D(n-1)-D(n)}{D(n-1)}\iff\alpha\,D(n-1)=D(n-1)-D(n)$ (car $D(n-1)$ n'est jamais nul).
   ou encore $D(n)=(1-\alpha)\,D(n-1)$

   ii. On constate que $\Big(D(n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $(1-\alpha)$, donc $\forall n\in\mathbb{N},\ D(n)=(1-\alpha)^nD(0)$.
   De plus, comme $F(0)=0$, $D(0)=1$ donc $D(n)=(1-\alpha)^n$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(T=n)=\pi_n\,D(n-1)=\alpha\,(1-\alpha)^{n-1}$; finalement

   $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ D(n)=(1-\alpha)^n\text{ et }T\hookrightarrow\mathscr{G}(\alpha)}$$

2. **Nombre moyen de pannes successives dans un cas particulier**

   (a) i. $E(T)=1\times P(T=1)+2\times P(T=2)=2-p$

   ii. R_1 et R_2 suivent des lois de Bernoulli, donc leur espérance est égale à leur paramètre. $[R_1=1]\iff[T=1]$ (le composant tombe en panne à l'instant 1) donc $P(R_1=1)=P(T=1)=p$.
   $[R_2=1]$ est réalisé si et seulement si le composant a une durée de vie égale à 2, ou bien s'il tombe en panne à l'instant 1 et son remplaçant tombe en panne à l'instant 2 (donc a une durée de vie égale à 1 aussi) : $P(R_2=1)=P(T=2)+P(T=1)^2=1-p+p^2$.

   $$\boxed{E(T)=2-p\ ;\ r_1=p\ ;\ r_2=1-p+p^2}$$

   (b) i. Soit C_n le composant en service à l'instant n ; soit il tombe en panne à l'instant $n+1$ et dans ce cas $R_{n+1}=1$, soit il reste en service jusqu'à l'instant $n+2$, donc $R_n=1$ et $R_{n+2}=1$.
   $\forall n\in\mathbb{N}^*$, les événements $[R_n=1]$ et $[R_n=0]$ forment un système complet.
   ⋆ De plus, $P_{[R_{n+1}=0]}\big(R_{n+2}=1\big)=P(T_n=2)=1-p$ (le composant fonctionne aux instants n et $n+1$ donc arrête nécessairement de fonctionner à l'instant $n+2$).
   ⋆ De même, $P_{[R_{n+1}=1]}\big(R_{n+2}=1\big)=P(T_{n+1}=1)=p$ (le composant tombe en panne à l'instant $n+1$ donc a une probabilité égale à p de retomber en panne à l'instant $n+2$).

ii. On applique la formule des probabilités totales :

$$P\big(R_{n+2}=1\big) = P\big([R_{n+1}=1]\cap[R_{n+2}=1]\big) + P\big([R_{n+1}=0]\cap[R_{n+2}=1]\big)$$
$$= P\big(R_{n+1}=1\big)\, P_{[R_{n+1}=1]}\big(R_{n+2}=1\big) + P\big(R_n=1\big)\, P_{[R_n=1]}\big(R_{n+2}=1\big)$$

Les variables R_k suivent des lois de Bernoulli, donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $E(R_n)=P(R_n=1)=r_n$, ainsi :

$$r_{n+2} = r_{n+1}\,p + r_n\,(1-p)$$

(c) i. (r_n) est une suite récurrente linéaire double dont l'équation caractéristique associée est $X^2-p\,X+p-1$. 1 est racine évidente, l'autre racine est $p-1$. Donc il existe deux constantes réelles A et B telles que l'on ait : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $r_n = A\times 1^n + B\times(p-1)^n$, en particulier :

$r_1=p$ et $r_2=1-p+p^2$ donc A et B sont solution du système :

$$\left\{\begin{array}{lllll} A & + & (p-1)\,B & = & p \\ A & + & (p-1)^2 B & = & 1-p+p^2\end{array}\right. ,\quad \text{ainsi } A=\frac{1}{2-p} \text{ et } B=\frac{1-p}{2-p}$$

ii. $|p-1|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=(p-1)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = A = \dfrac{1}{2-p}$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ r_n=\frac{1-(p-1)^{n+1}}{2-p} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{2-p}=\frac{1}{E(T)}}$$

(d) Le nombre de pannes survenues jusqu'à l'instant n est égal au nombre de variables $R_k (1\leqslant k\leqslant n)$ qui prennent la valeur 1 ; donc $U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n R_k$.

Par conséquent, par linéarité de l'espérance, on a $E(U_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^n r_k = \frac{1}{2-p}\left(n+\sum_{k=1}^n (p-1)^{k+1}\right)$

La série de terme général r_n est convergente (vers $\frac{(p-1)^2}{(2-p)^2}$) donc ses sommes partielles sont négligeables devant n ; ainsi $E(U_n)\underset{n\infty}{\sim}\dfrac{n}{2-p}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_n=\sum_{k=1}^n R_k\ ;\ E(U_n)=\frac{1}{2-p}\Big[n+(p-1)^2\,(1-(p-1)^n\Big]\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{n}{2-p}}$$

3. **Nombre moyen de pannes successives dans un cas particulier**

(a) La formule est évidente pour $n=m$: $\displaystyle\sum_{j=m}^m\binom{j}{m}=\binom{m}{m}=\binom{m+1}{m+1}=1$

Soit n un entier supérieur ou égal à n, donné ; supposons l'égalité vérifiée pour n.

$$\sum_{j=m}^{n+1}\binom{j}{m}=\sum_{j=m}^{n}\binom{j}{m}+\binom{n+1}{m}=\binom{n+1}{m+1}+\binom{n+1}{m}=\binom{n+2}{m+1} \text{ (formule de Pascal).}$$

(b) i. T_1 et T_2 sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc $(S_2)\,(\Omega)\subset\{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2\}$

Soit $n\geqslant 2$, $[S_2=n]=\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1}\Big([T_1=k]\cap[T_2=n-k]\Big)$. Cette réunion est disjointe donc

$P(S_2=n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}P\Big([T_1=k]\cap[T_2=n-k]\Big)$. T_1 et T_2 sont indépendantes donc

$$P(S_2=n)=\sum_{k=1}^{n-1}P\big(T_1=k\big)\times P\big(T_2=n-k\big)=\sum_{k=1}^{n-1}p\,(1-p)^{k-1}\times p\,(1-p)^{n-k-1}=(n-1)\,p^2(1-p)^{n-2}$$

$$\boxed{\forall n\geqslant 2,\ P(S_2=n)=(n-1)\,p^2(1-p)^{n-2}}$$

ii. La formule proposée est évidente pour $k=1$ (car $\binom{0}{0}=1$) et a été prouvée pour $k=2$ à la question précédente.

Supposons la vraie pour une valeur k donnée, supérieure ou égale à 1. On a $S_{k+1}=S_k+T_{k+1}$

$S_k(\Omega)=\{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant k\}$ donc $S_{k+1}(\Omega)\subset\{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant k+1\}$

$\forall n \geqslant k+1,\ [S_{k+1}=n] = \displaystyle\bigcup_{i=k}^{n-1} \Big([S_k=i] \cap [T_{k+1}=n-i] \Big)$ qui est une réunion disjointe, donc

$P(S_{k+1}=n) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n-1} P\big(S_k=i\big) \times P\big(T_{k+1}=n-i\big) = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i-1}{k-1} k-1 p^k (1-p)^{i-k} \times p\,(1-p)^{n-i-1}$

$P(S_{k+1}=n) = p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \displaystyle\sum_{i=k}^{n-1} \binom{i-1}{k-1} = p^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)} \binom{n-1}{k}$

La formule est donc établie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \geqslant k$.

(c) i. $[U_n=0]$ est réalisé si et seulement si aucun composant n'est tombé en panne jusquà l'instant n inclus, c'est à dire $[U_n =] = [T_1 > n]$.
Donc $P(U_n=0) = P(T_1>n) = D(n) = (1-p)^n$.

ii. $[U_n \geqslant k]$ est réalisé si et seulement s'il y a eu au moins k pannes jusqu'à l'instant n. Cela signifie que la k^{e} panne a lieu au plus tard jusqu'à l'instant n, c'est à dire $[S_k \leqslant n]$

iii. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a donc $P(U_n=k) = P(U_n \geqslant k) - P(U_n \geqslant k+1) = P(S_k \leqslant n) - P(S_{k+1} \leqslant n)$.

$P(U_n=k) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} p^k\,(1-p)^{i-k} - \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i-1}{k} p^{k+1}\,(1-p)^{i-k-1}$

Montrons par récurrence sur n que $\forall n \geqslant k,\ P(U_n=k) = \displaystyle\binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}$.

$\star$ **initialisation :** $n=k$ la deuxième somme est nulle $(k+1>n=k)$ et la première comporte un seul terme égal à $\displaystyle\binom{k-1}{k-1} p^k\,(1-p)^0 = p^k$

Ainsi $P(U_k=k) = p^k$.

$\star$ **hérédité :** soit $n \geqslant k$ fixé, supposons que l'on a

$A_n = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} (1-p)^{i-k} - \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i-1}{k} p\,(1-p)^{i-k-1} = p^{-k} P(U_n=k) = \binom{n}{k} (1-p)^{n-k}.$

$A_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=k}^{n+1} \binom{i-1}{k-1} (1-p)^{i-k} - \sum_{i=k+1}^{n+1} \binom{i-1}{k} p(1-p)^{i-k-1} = A_n + \binom{n}{k-1} (1-p)^{n+1-k} - \binom{n}{k} p(1-p)^{n-k}$

$= \left[\displaystyle\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] (1-p)^{n+1-k} = \binom{n+1}{k} (1-p)^{n+1-k}$

On a donc $p^{-k} P(U_{n+1}=k) = \displaystyle\binom{n+1}{k} (1-p)^{n+1-k}$ donc $P(U_{n+1}=k) = \binom{n+1}{k} p^k\,(1-p)^{n+1-k}$

En conclusion

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(U_n=0) = (1-p)^n\ ;\ [U_n \geqslant k] = [S_k \leqslant n]\ ;\ \text{et } U_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)}$$

(d) i. Les fonctionnements des 1000 composants sont indépendants donc $U \hookrightarrow \mathscr{B}(1000\,n, p) = \mathscr{B}(10^5,\ \frac{1}{200})$

ii. On approxime la loi binômiale suivie par U à une loi normale, donc le stock doit être au moins égal à $500 + 1,65\sqrt{10^5 \times \dfrac{1}{200} \times \left(1 - \dfrac{1}{200}\right)} \simeq 536,8$ Il faut donc au moins 537 composants.

Partie 2

1. • À l'instant $t = 1,5$, les machines 1, 3, 5 et 7 sont en panne, donc les dispositifs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont en panne.
En effet, les machines 1 et 2 sont en série, mais les machines 3 et 4 sont en parallèle.
Quant au troisième dispositif, la série "5-6" est en panne, et la machine 7 aussi.

•

	t = 0	t = 0,5	t = 1	t = 1,5	t = 2	t = 2,5	t = 3
D_1	1	1	1	0	0	0	0
D_2	1	1	1	1	0	0	0
D_3	1	0	0	0	0	0	0

2. M_1 n'a subi aucune panne jusqu'à l'instant t au moins $\iff X(\omega) > t$
Par hypothèse, $\forall t > 0$, $P\big(X_1(\omega) > t\big) = \mathrm{e}^{-t}$, donc $P\big(X_1(\omega) \leqslant t\big) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.

3. (a) Les machines 1 et 2 sont en série donc $\mathcal{D}_1$ tombe en panne dès que l'une des deux machines est en panne ; ainsi $Y_1 = X_1$ si la machine 1 tombe en panne avant la machine 2 et $Y_1 = X_2$ sinon.

   $[Y_1 > t] = [X_1 > t] \cap [X_2 > t]$ et comme X_1 et X_2 sont indépendantes, on a
   $P(Y_1 > t) = P(X_1 > t) \times P(X_2 > t) = \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^2$. Donc

   $$\boxed{Y_1 = \min(X_1, X_2)\ ;\ P(Y_1 \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-2t}\ ;\ Y_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(2)}$$

   (b) Les machines 3 et 4 sont en parallèle donc $\mathcal{D}_2$ tombe en panne si les deux machines le sont, c'est à dire à la deuxième panne. On en déduit $Y_2 = \max(X_3, X_4)$.

   $[Y_2 \leqslant t] = [X_3 \leqslant t] \cap [X_4 \leqslant t]$ et comme X_3 et X_4 sont indépendantes, on a $P(Y_2 \leqslant t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^2$.

   $$\boxed{Y_2 = \max(X_3, X_4)\ ;\ P(Y_2 \leqslant t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^2}$$

   (c) Pour le troisième dispositif, la série "5-6" est en panne dès que la machine 5 ou 6 l'est, et $\mathcal{D}_3$ tombe en panne si la machine 7 et la série "5-6" sont en panne ; ainsi $Y_3 = \max\Big(\min(X_5, X_6)\,,\,X_7\Big)$.

   $[Y_3 \leqslant t] = [\min(X_5, X_6) \leqslant t] \cap [X_7 \leqslant t]$ et comme X_5, X_6 et X_7 sont mutuellement indépendantes,

   $$\boxed{P(Y_3 \leqslant t) = P(\min(X_5, X_6) \leqslant t) \times P(X_7 \leqslant t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right) \times \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)}$$