Corrigé du devoir surveillé n^{o}3

Exercice

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(I_n, \overline{I}_n)$ forment un système complet d'événements donc, en appliquant la formule des probabilités totales :
$P(I_{n+1}) = P(I_n) \times P_{I_n}(I_{n+1}) + P(\overline{I}_n) \times P_{\overline{I}_n}(I_{n+1})$ donc $p_{n+1} = p_n \times p + q_n \times q$, de même
$P(\overline{I}_{n+1}) = P(I_n) \times P_{I_n}(\overline{I}_{n+1}) + P(\overline{I}_n) \times P_{\overline{I}_n}(\overline{I}_{n+1})$ donc $q_{n+1} = p_n \times q + q_n \times p$

2. • D'après les relations précédentes, on a $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ donc $X_{n+1} = A\, X_n$ avec $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$
   • $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car au départ on a l'information initiale.
   On montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = A^{n-1} X_1$

3. Les matrices A et Δ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans deux bases différentes, ou encore s'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, telle que $A = P\,\Delta\,P^{-1}$.
Si on raisonne en termes d'endomorphismes, on peut considérer que A est la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathbb{R}^2$, donc puisque $\Delta \times \binom{1}{0} = 1 \times \binom{1}{0}$ et $\Delta \times \binom{0}{1} = (2\,p-1) \times \binom{0}{1}$, il existe deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ tels que $f(\vec{e}_1) = 1 \cdot \vec{e}_1$ et $f(\vec{e}_2) = (2\,p-1) \cdot \vec{e}_2$
Si on raisonne avec les matrices, en posant $\binom{u}{v} = P^{-1} \times \binom{1}{0}$ et $\binom{u'}{v'} = P^{-1} \times \binom{0}{1}$, on obtient :
$\Delta \binom{1}{0} = \binom{1}{0} \iff P^{-1} A \binom{u}{v} = \Delta \underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{\binom{1}{0}} = \binom{1}{0} = P^{-1}\binom{u}{v} \iff A\binom{u}{v} = \binom{u}{v}$; de même
$\Delta \binom{0}{1} = (2\,p-1)\binom{0}{1} \iff P^{-1} A \binom{u'}{v'} = \Delta\, P^{-1}\binom{u'}{v'} = (2\,p-1)\binom{0}{1} \iff A\binom{u'}{v'} = (2\,p-1)\binom{u'}{v'}$
On résout donc $A\,X = \lambda\,X$ avec $\lambda \in \{1, 2\,p-1\}$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on obtient :
$\left\{ \begin{array}{l} p\,x + q\,y = \lambda\,x \\ q\,x + p\,y = \lambda\,y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (p-\lambda)\,x + q\,y = 0 \\ q\,x + (p-\lambda)\,y = 0 \end{array} \right.$
$\iff \left\{ \begin{array}{l} (p-\lambda)\,x + q\,y = 0 \\ q\,x + (p-\lambda)\,y = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} (p-\lambda)\,x + q\,y & = 0 \\ \left[(p-\lambda)^2 - q^2\right] x = 0 & L_2 \leftarrow (p-\lambda)L_1 - q\,L_2 \end{array} \right.$
$(p-\lambda)^2 - q^2 = 2\,p\,(1-\lambda) + \lambda^2 - 1 = (1-\lambda)\,(2\,p-1-\lambda)$, on retrouve bien que $A - \lambda\,I_2$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2\,p-1$
$A\,X = X \iff x = y$ et $A\,X = (2\,p-1)\,X \iff x = -y$ donc $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ par exemple.

4. $A^{N-1} = P\,\Delta^{N-1}\,P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^{N-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc
$X_N = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^{N-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{(2p-1)^{N-1}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{(2p-1)^{N-1}}{2} \end{pmatrix}$
On obtient bien les résultats annoncés.

5. $p \in]0,1[$ donc $2\,p-1 \in]-1,1[$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (2p-1)^{N-1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} P(I_N) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\overline{I}_N) = \dfrac{1}{2}$

Problème

Préliminaires

1. Par définition $P_A\,(C/B) = \dfrac{P_A\,(B \cap C)}{P_A(B)}$ donc $P_A\,(C/B) = \dfrac{P\big(A \cap (B \cap C)\big) \div P(A)}{P\,(A \cap B) \div P(A)} = \dfrac{P\big(A \cap B \cap C\big)}{P\,(A \cap B)}$.
$$\boxed{P_A\,(C/B) = P_{A\cap B}(C)}$$
2. Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ donc $\dfrac{P\big((A \cap B) \cap C\big)}{P\,(A \cap B)} = \dfrac{P\big(A \cap C\big)}{P\,(A)} = P_A(C)$.

Première partie

1. Les événements E_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont inclus les uns dans les autres ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_{n+1} \subset E_n$) donc $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n = E_n$.
2. E_1 est l'événement certain puisque la probabilité de franchir la hauteur 1 est égale à 1 : $P(E_1) = q_1 = 1$.
$E_2 = E_1 \cap E_2$ donc $P(E_2) = P(E_1) \times P_{E_1}(E_2) = q_1\, q_2 = \dfrac{1}{2}$; de même
$E_3 \subset E_2 \subset E_1$ donc $P(E_3) = P(E_1) \times P_{E_1}(E_2) \times P_{E_1 \cap E_2}(E_3) = P(E_1) \times P_{E_1}(E_2) \times P_{E_2}(E_3) = q_1\, q_2\, q_3 = \dfrac{1}{6}$.
On montrerait de même que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(E_n) = \dfrac{1}{n!}$.
3. L'événement $[X = n]$ peut s'écrire à partir des événements E_k : $[X = n] = E_n \cap \overline{E}_{n+1} = E_n \setminus E_{n+1}$, donc $P(X = n) = P(E_n) \times P_{E_n}(\overline{E}_{n+1}) = \dfrac{1}{n!} \times \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$.
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}}$$
4. En remarquant que $P(X = n) = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$, on obtient une somme télescopique et $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P(X = n) = 1 - \frac{1}{(N+1)!}$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$; la loi X a une probabilité nulle de ne pas être finie.
5. Sous réserve de convergence, l'espérance de la variable X est égale à : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\frac{n^2}{(n+1)!} \leqslant \frac{n\,(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!}$ qui est le terme général d'une série convergente (série exponentielle de paramètre 1).
D'après le théorème de comparaison à termes positifs on déduit la convergence de la série de terme général $\frac{n^2}{(n+1)!}$ et l'existence de $E(X)$.
On calcule plutôt l'espérance de la variable $X + 1$ (dont l'existence équivaut à celle de X) et
$E(X+1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1)}{(n-1)!} = \mathrm{e}$, par conséquent $E(X) = \mathrm{e} - 1$.
6. De même, sous réserve de convergence, l'espérance de X^2 vaut : $E(X^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\, P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $\frac{n^3}{(n+1)!} \leqslant \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!}$ donc on conclut comme précédemment à l'existence du moment d'ordre deux.
Il est toutefois plus judicieux de calculer $E(X^2 - 1)$ qui vaut $E(X^2 - 1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,(n^2-1)}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n\,(n^2-1)}{(n+1)!}$.
$E(X^2 - 1) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \mathrm{e}$ donc $V(X) = E(X^2 - 1) + E(X) - \big(E(X)\big)^2 = \mathrm{e} + (\mathrm{e} - 1) - (\mathrm{e} - 1)^2 = 3\,\mathrm{e} - \mathrm{e}^2$.

Seconde partie

1. (a) Notons T_n l'événement « Le n^e tir est réussi ». Comme A_n ne tire que si les précédents ont échoué, on a $T_n \subset \left(\overline{T}_1 \cap \ldots \cap \overline{T}_{n-1}\right)$ et $P(G_n) = P\left(\overline{T}_1\right) \times P_{\overline{T}_1}(\overline{T}_2) \times \cdots \times P_{\overline{T}_{n-2}}(\overline{T}_{n-1}) \times P_{\overline{T}_{n-1}}(T_n)$

$$= q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_{n-1} \times p_n$$

Or, $\varphi(n-1) - \varphi(n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} q_i - \prod_{i=1}^{n} q_i = \prod_{i=1}^{n} q_i \times (1 - q_n)$, donc $P(G_n) = \varphi(n-1) - \varphi(n)$.

Tous les q_i, $i \in \mathbb{N}^*$ sont des réels positifs inférieurs à 1 donc la suite $\Big(\varphi(n)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante à termes positifs, donc minorée (par 0) et par conséquent convergente.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P(G_n) = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n-1) - \varphi(n) = \varphi(0) - \varphi(N)$ (somme télescopique) $= 1 - \varphi(N)$

$\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \varphi(N) = a$ donc la série de terme général $P(G_n)$ est convergente et sa somme est égale à $1 - a$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = 1 - a}$$

(c) Le jeu dure indéfiniment si et seulement si personne ne réussit aucun tir, c'est l'événement $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n$ dont la probabilité vaut $1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = a$.

$$\boxed{P(I) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n\right) = a}$$

2. (a) Si $a \neq 0$, alors $\varphi(n) \underset{n\infty}{\sim} a$ (et bien sûr $\varphi(n-1) \underset{n\infty}{\sim} a$ aussi) et comme $q_n = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)}$, on obtient $q_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{a}{a} = 1$.

La réciproque est fausse : avec $q_n = \dfrac{n}{n+1}$, on obtient $\varphi(n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{n+1}$ ce qui donne $a = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = 0$ et pourtant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_n = 1$.

(b) Ici q_n ne tend pas vers 1 (mais vers 0) donc par contraposée de la question précédente on peut affirmer que $a = 0$. On peut aussi faire un calcul direct car $\varphi(n) = (1-p)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $1 - p \in]0, 1[$.

(c) $\ln\big(\varphi(n)\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{i\,(i+2)}{(i+1)^2}\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} \ln(i+2) - \ln(i+1)\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} \ln(i+1) - \ln(i)\right]$

$\ln\big(\varphi(n)\big) = \ln(n+2) - \ln 2 - \ln(n+1) + \ln 1 = \ln\left(\dfrac{n+2}{2\,(n+1)}\right)$ $\varphi(n) = \dfrac{n+2}{2\,(n+1)}$ donc

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

3. (a) i. Si $(p_n)_n$ ne tend pas vers 0, alors la série de terme général p_n diverge grossièrement (cours). D'autre part $p_n \underset{n\infty}{\to} 0 \iff (1 - p_n) \underset{n\infty}{\to} 1 \iff \ln(1 - p_n) \underset{n\infty}{\to} 0$, donc si p_n ne tend pas vers 0, $\ln(1 - p_n)$ non plus et la série correspondante est encore grossièrement divergente.

$$\boxed{p_n \text{ ne tend pas vers } 0 \Longrightarrow \text{les séries de termes généraux } p_n \text{ et } \ln(1-p_n) \text{ sont grossièrement divergentes}}$$

ii. Si $p_n \underset{n\infty}{\to} 0$, alors $\ln(1 - p_n) \underset{n\infty}{\sim} -p_n$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1-p_n)}{-p_n} = 1$; prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$; d'après la définition de la limite d'une suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left|\dfrac{\ln(1-p_n)}{-p_n} - 1\right| < \dfrac{1}{2}$

Ceci équivaut à $n \geqslant n_0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} < \dfrac{\ln(1-p_n)}{-p_n} - 1 < \dfrac{1}{2}$ ou encore $\dfrac{p_n}{2} < -\ln(1-p_n) < \dfrac{3\,p_n}{2}$

iii. Les séries de termes généraux p_n et $-\ln(1-p_n)$ sont à termes positifs.

• Supposons que $\sum p_n$ converge : par application du théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum -\ln(1-p_n)$ converge (on utilise $0 < -\ln(1-p_n) < \frac{3\,p_n}{2}$).

• Supposons à présent que $\sum p_n$ diverge : on utilise $0 < \frac{p_n}{2} < -\ln(1-p_n)$ pour appliquer le théorème de comparaison des séries à termes positifs et en déduire que $\sum -\ln(1-p_n)$ diverge.

• Par conséquent les séries $\sum p_n$ et $\sum \ln(1-p_n)$ sont toujours de même nature.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1-p_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)\right) = \ln\big(\varphi(n)\big)$, donc la série de terme général $\ln(1-p_n)$ et la suite $\Big(\ln\big(\varphi(n)\big)\Big)_n$ sont de même nature.

(c) La probabilité que le jeu dure indéfiniment est nulle si et seulement si $a=0$, ce qui équivaut à $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\big(\varphi(n)\big) = -\infty$. D'après la question précédente, on peut donc conclure que :

$$\boxed{p(I)=0 \iff \lim_{n\to\infty}\big(\varphi(n)\big) = -\infty \iff \sum \ln(1-p_n) \text{ diverge} \iff \sum p_n \text{ diverge.}}$$