Corrigé du devoir surveillé n^o 1

Partie 1 : première approximation de $\sqrt{2}$

1. ⋆ B est le point de coordonnées $(\sqrt{2},0)$; on peut évidemment définir M_0 en choisissant pour u_0 n'importe quel réel positif différent de $\sqrt{2}$ et de a, l'abscisse de A. Le point $M_0(u_0, u_0^2-2)$ est ainsi bien défini.

   ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons la suite de points définie jusqu'à n : $M_0\,(u_0, f(u_0))\,, M_1\,(u_1, f(u_1))\,, \ldots, M_n\,(u_n, f(u_n))$. $u_n \neq a$ par hypothèse, et comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (donc en particulier injective) on en déduit $f(u_n) \neq f(a)$, donc la droite $\big(A\,M_n\big)$ n'est pas parallèle à l'axe des abscisses. Ces deux droites sont par conséquent sécantes en un point, notons B_{n+1} ce point d'intersection (en particulier $B_1 = B$). B_{n+1} et M_{n+1} ont même abscisse u_{n+1} par définition, B_{n+1} a une ordonnée nulle puisqu'il est sur l'axe des abscisses et M_{n+1} a pour coordonnées $(u_{n+1}, f(u_{n+1}))$.

   Une équation de la droite $\big(A\,M_n\big)$ est $Y-(a^2-2) = \dfrac{u_n^2-a^2}{u_n-a} \times (X-a)$, l'ordonnée de B_{n+1} est nulle donc $-a^2+2 = \dfrac{u_n^2-a^2}{u_n-a} \times (u_{n+1}-a) = (u_n+a)\times(u_{n+1}-a)$; finalement, $\boxed{u_{n+1} = \dfrac{2-a^2}{u_n+a} + a = \dfrac{2+a\,u_n}{u_n+a}}$

2. (a) On déduit du résultat précédent : $u_{n+1}-\sqrt{2} = \dfrac{2+a\,u_n}{u_n+a} - \sqrt{2} = \dfrac{2+a\,u_n-\sqrt{2}(a+u_n)}{u_n+a} = \dfrac{2+a\,u_n-a\sqrt{2}-\sqrt{2}\,u_n}{u_n+a}$

   $$\boxed{u_{n+1}-\sqrt{2} = \frac{(a-\sqrt{2})\times(u_n-\sqrt{2})}{u_n+a}}$$

   (b) u_n est positif donc $u_n + a \geqslant a > 0$, par conséquent $0 < \dfrac{1}{|u_n+a|} \leqslant \dfrac{1}{a}$ et

   $$\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| = \left|\frac{a-\sqrt{2}}{u_n+a}\right| \times \left|u_n-\sqrt{2}\right| \leqslant \left|\frac{a-\sqrt{2}}{a}\right| \times \left|u_n-\sqrt{2}\right| = \left|1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right| \times \left|u_n-\sqrt{2}\right|$$

   On procède ensuite par récurrence : notons P_n la proposition : $\left|u_n-\sqrt{2}\right| \leqslant \left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times \left|u_0-\sqrt{2}\right|$.

   P_0 est vraie de façon évidente.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie ; on a $\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leqslant \left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right| \times \left|u_n-\sqrt{2}\right|$ d'après la question précédente,

   donc $\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leqslant \left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right| \times \left(\underbrace{\left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times \left|u_0-\sqrt{2}\right|}_{\text{En utilisant } P_n}\right) = \left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|^{n+1} \times \left|u_0-\sqrt{2}\right|$.

   (c) Pour que la suite converge, il suffit que $\left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|^n$ tende vers 0, donc que l'on ait $\left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right| < 1$,

   c'est à dire $\boxed{a > \dfrac{\sqrt{2}}{2}.}$ On a alors $\left|u_n-\sqrt{2}\right|$ tend vers 0, donc $\boxed{\text{la suite } (u) \text{ converge vers } \sqrt{2}}$.

3. (a) Pour $a = 1$ et $u_0 = 2$, on a $\left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times \left|u_0-\sqrt{2}\right| = \left(\sqrt{2}-1\right)^n \times \left(2-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^{n+1}$, et

   comme $0 < \sqrt{2}-1 < \dfrac{1}{2}$, on obtient $\left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times \left|u_0-\sqrt{2}\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   Il suffit que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ soit inférieur ou égal à 10^{-3} pour avoir l'approximation demandée, donc :

   $$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-3} \iff n\,\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant -3\,\ln(10) \iff n \geqslant \frac{-3\,\ln(10)}{-\ln(2)} = 3 \times \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 9,97$$

   $$\boxed{u_n \text{ approxime } \sqrt{2} \text{ à } 10^{-3} \text{ près au moins dès que } n \geqslant n_0 = 10}$$

L'égalité établie à la question 2a permet de voir que $u_{n+1}-\sqrt{2}$ et $u_n-\sqrt{2}$ sont de signes opposés, donc $u_0=2>\sqrt{2}$ et par une récurrence immédiate c'est le cas pour tous les termes de rang pair de (u) ; de même tous les termes de rang impair sont supérieurs à $\sqrt{2}$.
Le calcul des premiers termes de la suite donne $u_1=\frac{4}{3}$, $u_2=\frac{10}{7}<1,5$ et $u_3=\frac{24}{17}>1,4$ donc

$$\boxed{1,4<u_3<\sqrt{2}<u_2<1,5}$$

(b) Remarquons tout d'abord que (v) est bien définie car pour tout n, $u_n>0$.

$$u_{n+1}+\sqrt{2}=\frac{2+u_n}{1+u_n}+\sqrt{2}=\frac{2+u_n+\sqrt{2}+\sqrt{2}\,u_n}{1+u_n}=\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2})+u_n\,(1+\sqrt{2})}{1+u_n}=\frac{(1+\sqrt{2})\,(u_n+\sqrt{2})}{1+u_n}$$

Donc $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_{n+1}+\sqrt{2}}=\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}\right)\times\left(u_n-\sqrt{2}\right)\times\dfrac{(1+u_n)}{(1+\sqrt{2})\,(u_n+\sqrt{2})}=\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\times v_n$

(v) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=-\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ et de premier terme $v_0=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=(-1)^n\left(\sqrt{2}-1\right)^{2(n+1)}}$$

$u_n-\sqrt{2}=v_n\left(u_n+\sqrt{2}\right)$ donc $u_n=\sqrt{2}\left(\dfrac{1+v_n}{1-v_n}\right)$ et $u_n-\sqrt{2}=\dfrac{2\sqrt{2}\,v_n}{1-v_n}$.
La raison de (v) appartient à $]-1,1[$ donc $(|v_n|)$ décroit, et comme $v_0>0$, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<1-v_0<1-v_n$.
Par conséquent $\left|u_n-\sqrt{2}\right|=\dfrac{2\sqrt{2}\times\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+2}}{1-v_n}\leqslant\dfrac{2\sqrt{2}}{1-v_0}\times\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)^{n+1}$
$1-v_0=2\left(\sqrt{2}-1\right)$ donc $\dfrac{2\sqrt{2}}{1-v_0}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}<4$ (et même <3) ; $\left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}<0,3$ (et même $<0,2$) donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|u_n-\sqrt{2}\right|\leqslant 4\times(0,3)^{n+1}$

(c)
```
def u(n,u0,a):
    U=[0]*(n+1)
    U[0]=u0
    for k in range(0,n):
        U[k+1]=(2+a*U[k])/(a+U[k])
    return U[n]
```

[

Partie 2 : la méthode de Newton (algorithme de Babylone)

1. (a) ⋆ Le choix de a_0 est bien sûr possible, on y associe le point P_0 de $\mathcal{C}$ d'abscisse a_0. Comme $a_0\neq 0$ la tangente à $\mathcal{C}$ en P_0 n'est pas horizontale, donc elle coupe l'axe des abscisses. L'équation de cette tangente est : $Y-\left(a_0^2-2\right)=2\,a_0\,(X-a_0)$ donc $a_1=\dfrac{a_0^2+2}{2\,a_0}>0$.

⋆ Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons construite la suite (a) jusqu'au rang n inclus et soit P_n le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a_n, a_n étant strictement positif. La tangente à $\mathcal{C}$ en P_n a pour équation : $Y-\left(a_n^2-2\right)=2\,a_n\,(X-a_n)$ et coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+2}{2\,a_n}>0$

(b) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0,\ g'(x)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)$ donc $g'(x)\geqslant 0\iff x\geqslant\sqrt{2}$

g décroit sur $]0,\sqrt{2}[$ et croit sur $]\sqrt{2},+\infty[$ donc atteint son minimum en $x=\sqrt{2}$, et $g\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$

(c) On remarque que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=g(a_n)$ et $a_0>0$, donc par une récurrence immédiate $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}\geqslant\sqrt{2}$.
Ainsi $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2-a_n^2}{a_n}\right)<0$, (a) est une suite décroissante.
(a) est aussi minorée par $\sqrt{2}$ donc elle est convergente et sa limite ℓ est supérieure ou égale à $\sqrt{2}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}$ et comme $a_{n+1}=g(a_n)$ et que g est continue sur $]0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}g(a_n)=\ell$

ℓ est donc solution de l'équation $g(x) = x$. Or $g(x) = x \iff \dfrac{2 - x^2}{x} = 0 \iff x = \sqrt{2}$

$$\boxed{\text{La suite } (a) \text{ converge vers } \ell = \sqrt{2}}$$

2. (a) $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} - \sqrt{2}}{a_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\dfrac{a_n^2 + 2}{a_n} - 2\sqrt{2}\right) \div \left(\dfrac{a_n^2 + 2}{a_n} + 2\sqrt{2}\right) = \dfrac{a_n^2 - 2\sqrt{2}\,a_n + 2}{a_n^2 + 2\sqrt{2}\,a_n + 2} = \left(\dfrac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}\right)^2 = b_n^2$

   On montre par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = (b_0)^{(2^n)}$

   (b) $b_0 = \dfrac{1,5 - \sqrt{2}}{1,5 + \sqrt{2}} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^4 = v_1$. On a donc bien $b_0 \leqslant 0,04$ (et même $\leqslant 0,03$).

   (c) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n - \sqrt{2} = b_n \times \left(a_n + \sqrt{2}\right) = \left(a_n + \sqrt{2}\right) \times (b_0)^{(2^n)}$
   $a_0 = 1,5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{2} < a_n \leqslant a_1 = \frac{17}{12}$ car à partir du rang 1, la suite (a) décroît vers $\sqrt{2}$; donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + \sqrt{2} \leqslant 1,5 + \sqrt{2} \leqslant 3,5$ (et même $\leqslant 3$) et $0 < a_n - \sqrt{2} \leqslant 3,5 \times (0,04)^{(2^n)}$

   (d) Il suffit que $3,5 \times (0,04)^{(2^n)}$ soit inférieur ou égal à 10^{-10} pour avoir l'approximation demandée, donc :

   $3,5 \times (0,04)^{(2^n)} \leqslant 10^{-10} \iff 2^n \ln(0,04) \leqslant \ln\left(\dfrac{10^{-10}}{3,5}\right) \iff 2^n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{10^{-10}}{3,5}\right)}{\ln(0,04)} = \dfrac{-\ln\left(3,5 \times 10^{10}\right)}{-\ln(25)}$

   soit $3,5 \times (0,04)^{(2^n)} \leqslant 10^{-10} \iff n \geqslant \ln\left(\dfrac{\ln\left(3,5 \times 10^{10}\right)}{\ln(25)}\right) \times \dfrac{1}{\ln 2} \simeq 2,9$

$$\boxed{a_n \text{ approxime } \sqrt{2} \text{ à } 10^{-10} \text{ près au moins dès que } n \geqslant n_1 = 3}$$

   (e)
```
def a(n,a0):
    A=[0]*(n+1)
    A[0]=a0
    for k in range(0,n):
        A[k+1]=0.5*(A[k]+(2/A[k]))
    return A[n]
```

Partie 3 : un problème de point fixe

- Soit $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $J =]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$ centré en α soit inclus dans I ; on a $x \in J \iff |x - \alpha| < \varepsilon$.
  Soit P_n la proposition : « $|u_n - \alpha| \leqslant m^n\,|u_0 - \alpha|$ »
  P_0 est vraie de façon évidente car $m^0 = 1$.
  φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, α et u_0 sont dans I, donc on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis entre u_0 et α : $|u_1 - \alpha| = |\varphi(u_0) - \varphi(\alpha)| \leqslant m\,|u_0 - \alpha|$. Donc P_1 est vraie ; et comme $m < 1$, $|u_1 - \alpha| < |u_0 - \alpha|$ donc $u_1 \in J$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que P_n est vraie et que $u_n \in J$. On peut à nouveau appliquer l'inégalité des accroissement finis à φ entre u_n et α :
  $|u_{n+1} - \alpha| = |\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| \leqslant m\,|u_n - \alpha|$.
  $\leqslant m \times m^n\,|u_0 - \alpha|$
  $\leqslant m^{n+1}\,|u_0 - \alpha|$ donc P_{n+1} est vérifiée et $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant m\,|u_n - \alpha| < |u_0 - \alpha|$.
  Ainsi $u_{n+1} \in J$.
- $0 < m < 1$ donc la suite $(m^n)_n$ converge vers 0. Par application du théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ donc la suite $(u_n)_n$ converge vers α.