2 BCPST 1 & 2 samedi 29 Mars 2014

MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°7
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE 1

Nous vous proposons dans cet exercice l'étude conjointe de deux variables aléatoires X et Y de même loi Uniforme sur $[0,1]$. Nous examinerons plus particulièrement les trois variables aléatoires $S = X + Y$, $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$ dans deux situations fondamentalement différentes. Toutes ces variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Première situation

Les variables aléatoires X et Y sont ici supposées **indépendantes**.

1. Donner une densité du couple (X,Y).

2. Déterminer $\mathrm{P}(S \leq t)$ en distinguant les quatre cas : $t < 0$, $0 \leq t < 1$, $1 \leq t < 2$, $2 \leq t$.

3. En déduire que S est une variable à densité et proposer une densité f_S de cette variable S. Représenter graphiquement cette fonction f_S.

4. Déterminer les lois des variables U et V en précisant pour chacune d'elles leurs densités respectives f_U et $f_{V.}$

Seconde situation

X est une variable aléatoire de Loi Uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et Y **est définie par** $\mathbf{Y = 1 - X}$.

1. Justifier que Y suit également une Loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Déterminer la Loi de la variable $S = X + Y$.

3. Soit t un réel quelconque.

(a) Représenter graphiquement sur le segment $[0,1]$, les fonctions $\varphi : x \longmapsto \min(x, 1-x)$ et $\psi : x \longmapsto \max(x, 1-x)$.

(b) Résoudre graphiquement sur le segment $[0,1]$, l'inéquation $\min(x, 1-x) \leq t$.

(c) Résoudre graphiquement sur le segment $[0,1]$, l'inéquation $\max(x, 1-x) \leq t$.

4. En déduire les lois des variables U et V en précisant pour chacune d'elles leurs densités respectives f_U et $f_{V.}$.

EXERCICE 2

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** à valeurs positives définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Nous supposerons que X et Y sont distribuées selon la même loi Exponentielle de paramètre λ et poserons $Z = \dfrac{X}{1+Y}$.

1. Donner une densité du couple (X, Y).

2. Soit t un réel strictement positif quelconque .

- Représenter graphiquement le domaine $D_t = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \Big/ \dfrac{x}{1+y} \leq t \right\}$.
- Exprimer à l'aide d'une intégrale double $P(Z \leq t)$.
- Montrer que $P(Z \leq t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} \times e^{-\lambda t}$.

3. Montrer que Z est une variable à densité et proposer une densité f_Z de cette variable Z.

4. En fait, Z mesure le temps d'attente d'une panne sur un réseau informatique.
Comparer $\mathrm{P}_{[Z>a]}(Z > a + t)$ et $\mathrm{P}(Z > t)$. Que peut-on en déduire sur la fiabilité de ce réseau ?

PROBLEME

On rappelle le résultat de cours suivant :

> Pour tout couple (U, V) de variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_U et f_V la variable $W = U + V$ admet une densité f_W définie par :
> $$\forall w \in \mathbb{R}, \quad f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(w-t) f_V(t) dt$$

Trois personnes notées A, B et C entrent simultanément dans un bureau pourvu de deux cabines téléphoniques seulement. Une unité de temps étant choisie, A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux cabines. C attend et occupe la première cabine disponible, dès que l'une des deux autres personnes a terminé sa communication.
Nous supposerons que :

- les durées de communication (exprimées en minutes) de A, B, C sont des v.a. mutuellement indépendantes, suivant la même loi exponentielle de moyenne 5 minutes notées respectivement X, Y et Z. (on notera α le paramètre de la loi exponentielle)
- la durée du changement d'intervenant dans une cabine est négligeable.

1. On souhaite déterminer la probabilité que C ne soit pas le dernier à sortir.

(a) On note $W = |X - Y|$. À quoi correspond la variable W ?

(b) Représenter graphiquement pour tout réel $w > 0$ le domaine :

$$B_w = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \middle| \, |y - x| \leq w\right\}$$

Déterminer la fonction de répartition de W.
Vérifier alors que W est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre α.

(c) Déterminer la loi du couple (Z, W).

(d) Représenter graphiquement le domaine :

$$D = \left\{(z, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \middle| \, z \leq w\right\}$$

Calculer $P(Z \leq W)$. Répondre alors à la question posée.

2. On note T la v.a. égale au temps passé par C dans le bureau de poste.

(a) Exprimer T en fonction de X, Y et Z.

(b) Déterminer la loi de $\min(X, Y)$.

(c) Déterminer la loi de la variable T.

(d) Calculer l'espérance de T.

3. On s'intéresse ici à l'instant de la dernière sortie du bureau de poste.
On appelle $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)}$ les v.a. égales aux temps des sorties successives.

(a) Justifier que $X_{(3)} = \min(X, Y) + \max(Z, |Y - X|)$.

(b) Déterminer la Loi de la v.a. $\max(Z, |Y - X|)$.

(c) Remarquer que T et $\max(Z, |Y - X|)$ ont même loi. En déduire la valeur de $E(X_{(3)})$.