Corrigé du devoir n^o 6

Exercice

1. $X(\Omega)=\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, P\big(X\leqslant x\big)=P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$ Or $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\hookrightarrow\mathscr{N}(0,1)$, donc $\boxed{F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)}$
2. $Y(\Omega)=\mathbb{R}^+$ donc $\forall x\leqslant 0$, $G(x)=0$, et pour $x>0$, $P\big(Y\leqslant x\big)=P(X\leqslant\ln x)=F(\ln x)$, donc :
$$\boxed{G(x)=\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)}$$
3. G est une fonction de répartition, donc croissante et à valeurs dans $[0,1]$. G est nulle, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^-$, continue en 0 car $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}G(x)=0=G(0)$. D'autre part G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ comme composée de fonctions qui le sont. Donc G est la fonction de répartition d'une variable à densité.
Une densité de Y s'obtient en dérivant G, donc :
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma\,x}\times\varphi\left(\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$
4. Sous réserve d'existence, $E(Y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x\,g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est une densité de X.
$$\mathrm{e}^x f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\exp\left(x-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\exp\left(\frac{\big(x-(\mu+\sigma^2)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right)\times\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)$$
Donc en posant $t=\dfrac{x-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}$, $E(Y)=\dfrac{\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{2\,\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)$.
5. $X\hookrightarrow\mathscr{N}(\mu,\sigma^2)$ donc $2\,X\hookrightarrow\mathscr{N}(2\,\mu,4\,\sigma^2)$. On en déduit sans calcul supplémentaire que $E\big(Y^2\big)=\exp\left(2\,\mu+\dfrac{4\,\sigma^2}{2}\right)$.
$$\boxed{E\big(Y^2\big)=\exp\big(2\,(\mu+\sigma^2)\big)}$$
6. $V(Y)=E\big(Y^2\big)-\big(E(Y)\big)^2=\exp\big(2\,(\mu+\sigma^2)\big)-\left(\exp\left(\mu+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\right)^2=\exp\big(2\,(\mu+\sigma^2)\big)-\exp\big(2\,\mu+\sigma^2\big)$
$$\boxed{V(Y)=\mathrm{e}^{2\mu}\Big(\mathrm{e}^{2\,\sigma^2}-\mathrm{e}^{\sigma^2}\Big)}$$

Problème 1

1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda^2 t^n\mathrm{e}^{-\lambda t}=0$ si $n\geqslant1$ et λ^2 si $n=0$.
Donc f est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $n\in\mathbb{N}^*$. Soit à présent $n\in\mathbb{N}^*$:
$\forall x>0,\ f'(x)=\lambda^2 t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,(n-\lambda\,t)$, donc $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$ si $n\geqslant2$ et λ^2 si $n=1$.
Comme f' est nulle sur $]-\infty,0[$, on en déduit
$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \iff n\geqslant 2}$$
2. Posons $\forall t\in\mathbb{R},\ P(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_k\,t^k$, donc $P(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une combinaison linéaire de fonctions $t\mapsto\alpha_k\,t^k\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ dont la limite en $+\infty$ est égale à 0. On en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\Big[P(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^{+\infty}=-P(0)$ converge, car $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}=0$.
Soit $A>0$, $\displaystyle\int_0^A f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t=\big[-\lambda\,t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\big]_0^A+\lambda\,(n+1)\int_0^A t^n\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$, donc lorsque $A\to+\infty$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n+1}{\lambda}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t}$$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = \lambda$, donc on montre par récurrence sur n $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{\lambda^{n-1}}}$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)\,\mathrm{d}t = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\,\mathrm{d}t$ puisque f_1 est nulle sur $]-\infty, 0[$, d'autre part f_1 est continue sur $\mathbb{R}^*$, à valeurs positives, donc c'est une densité de probabilité.

5. Sous réserve d'absolue convergence, $E(T_i) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}$ d'après la question 3.

   De même, $E\left(T_i^2\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{6}{\lambda^2}$, donc

$$\boxed{E(T_i) = \frac{2}{\lambda} \text{ et } V(T_i) = \frac{2}{\lambda^2}}$$

6. Puisque le système tombe en panne dès que l'un des composants tombe en panne, on a $T = \min(T_1, \dots, T_p)$
   Soit $t \in \mathbb{R}^+$; $\left[T > t\right] = \left[T_1 > t\right] \cap \dots \cap \left[T_p > t\right]$, et comme les variables T_i sont mutuellement indépendantes, les événements $\left[T_1 > t\right], \dots, \left[T_p > t\right]$ le sont aussi, donc $P\big(T > t\big) = P\Big(\left[T_1 > t\right] \cap \dots \cap \left[T_p > t\right]\Big) = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} P(T_i > t)$.

   On en déduit $F_T(t) = 1 - P\big(T > t\big) = 1 - \displaystyle\prod_{i=1}^{p}\big(1 - F_{T_i}(t)\big)$; or pour $t \geqslant 0$, $F_{T_i}(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda^2 x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \left[-\lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t + \lambda\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\lambda\, t\,\mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-\lambda t} + 1$.

$$\boxed{F_T(t) = 1 - \left[(1 + \lambda\, t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]^p \text{ si } t \geqslant 0 \text{ et } F_T(t) = 0 \text{ si } t < 0}$$

   Une densité de probabilité de T est alors donnée par :

$$\boxed{f_T(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } f_T(t) = p\,\lambda^2\, t\,(1 + \lambda\, t)^{p-1}\mathrm{e}^{-p\lambda t} \text{ si } t \geqslant 0}$$

7. Le système tombe en panne lorsque les deux éléments sont en panne, donc $W = \max(T_1, T_2)$.
   Soit $t \in \mathbb{R}^+$; $\left[W \leqslant t\right] = \left[T_1 \leqslant t\right] \cap \left[T_2 \leqslant t\right]$, comme les variables T_1 et T_2 sont indépendantes, les événements $\left[T_1 \leqslant t\right]$ et $\left[T_2 \leqslant t\right]$ le sont aussi, donc $P\big(W \leqslant t\big) = P\Big(\left[T_1 \leqslant t\right] \cap \left[T_2 \leqslant t\right]\Big) = P(T_1 \leqslant t) \times P(T_2 \leqslant t)$.

   Donc $F_W(t) = \left[1 - (1 + \lambda\, t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]^2$ si $t \geqslant 0$ et 0 sinon.

$$\boxed{\begin{gathered} F_W(t) = \left[1 - (1 + \lambda\, t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]^2 \text{ si } t \geqslant 0 \text{ et } F_W(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\[1em] f_W(t) = 2\,\lambda^2\, t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[1 - (1 + \lambda\, t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\right] \text{ si } t \geqslant 0 \text{ et } f_W(t) = 0 \text{ si } t < 0 \end{gathered}}$$

8. $P(T_1 \geqslant t) = P(T_2 \geqslant t) = (1 + \lambda\, t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $P(T \geqslant t) = \left[(1 + \lambda\, t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]^2 = \Big(P(T_1 \geqslant t)\Big)^2 < (1 + \lambda\, t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$
   et $P(W \geqslant t) = 1 - \left[1 - \big(1 + \lambda\, t\big)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]^2 = (1 + \lambda\, t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\underbrace{\left[2 - (1 + \lambda\, t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]}_{>1} > (1 + \lambda\, t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$

   On en conclut que $P(W \geqslant t) > P(T_1 \geqslant t) = P(T_2 \geqslant t) > P(T \geqslant t)$

Le système en série est moins fiable que le système doté d'un unique composant ; le système en parallèle est plus fiable que le système doté d'un unique composant ; et bien sûr, plus fiable que celui en série.

9. (a) Soit E un élément pris au hasard, les événements $[E = T_i]$ et $[E = U_j]$ forment un système complet, donc $\forall t \geqslant 0,\ [E \leqslant t] = \Big([E = T_i] \cap [T_i \leqslant t]\Big) \cup \Big([E = U_j] \cap [U_j \leqslant t]\Big)$, c'est une réunion disjointe, donc :

$P\big(X \leqslant t\big) = P(E = T_i) \times P(T_i \leqslant t) + P(E = U_j) \times P(U_j \leqslant t) = \dfrac{p}{p+q} F_{T_i}(t) + \dfrac{q}{p+q} F_{U_j}(t) = \dfrac{p}{p+q}\left(1 - (1+\lambda\, t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) + \dfrac{q}{p+q}\left(1 - (1+\mu\, t)\mathrm{e}^{-\mu t}\right)$, d'où une densité f_X de X est donnée par :

$$\boxed{f_X(t) = \frac{t}{p+q}\left(p\,\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda t} + q\,\mu^2 \mathrm{e}^{-\mu t}\right) \text{ si } t \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}}$$

(b) On constate qu'une densité de X est obtenue par combinaison linéaire des densités de T_i et U_j ; comme ces variables admettent une espérance, il en va de même pour X et $E(X) = \dfrac{p}{p+q} E(T_i) + \dfrac{q}{p+q} E(U_j)$

$$\boxed{E(X) = \frac{2}{p+q}\left(\frac{p}{\lambda} + \frac{q}{\mu}\right)}$$

(c) Pour les mêmes raisons, X admet un moment d'ordre deux donc une variance :

$E\left(X^2\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{p}{p+q}\lambda^2 t^3 \mathrm{e}^{-\lambda t} + \frac{q}{p+q}\mu^2 t^3 \mathrm{e}^{-\mu t}\right)\mathrm{d}t = \frac{p}{p+q}\,E(T_i^2) + \frac{q}{p+q}\,E(U_j^2) = \frac{6\,p}{\lambda^2(p+q)} + \frac{6\,q}{\mu^2(p+q)}$

Finalement $V(X) = \left(\dfrac{6\,p}{\lambda^2(p+q)} + \dfrac{6\,q}{\mu^2(p+q)}\right) - \dfrac{4}{(p+q)^2}\left(\dfrac{p}{\lambda} + \dfrac{q}{\mu}\right)^2 = \dfrac{2}{(p+q)^2}\left(\dfrac{p}{\lambda^2} + \dfrac{q}{\mu^2} + 2\,p\,q\left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\mu}\right)^2\right)$

$$\boxed{V(X) = \frac{2}{(p+q)^2}\left(\frac{p}{\lambda^2} + \frac{q}{\mu^2} + 2\,p\,q\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right)^2\right)}$$

Problème 2

Préliminaires

1. h est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues, et $\lim\limits_{x \to 0} x\,\ln x = 0$ donc h est continue en 0, et par conséquent sur $\mathbb{R}^+$.
2. ln est une fonction concave sur $]0, +\infty[$, et $y = x - 1$ est l'équation de la tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 1, donc $\forall x > 0,\ \ln x \leqslant x - 1$. Si $x = 1$, alors $\ln x = x - 1$. Réciproquement, posons $\varphi(x) = x - 1 - \ln x$, $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, et $\varphi''(x) = \dfrac{1}{x^2}$; donc φ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, négative pour $x < 1$ et positive pour $x > 1$. φ atteint donc un maximum égal à 0 en un unique point d'abscisse 1. Donc pour $x \neq 1$, $\ln x < x - 1$.

Partie I

1. (a) $\forall k \in I_n$, $p_k = \dfrac{1}{n+1}$ donc $H(X) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln(n+1)$.

(b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = p\,q^k$ donc sous réserve d'absolue convergence, $H(X) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p\,q^k \ln\left(p\,q^k\right)$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} p\,q^k \ln\left(p\,q^k\right) = p\,\ln p \sum_{k=0}^{N} q^k + p\,\ln q \sum_{k=0}^{N} k\,q^k$, donc $H(X)$ est la somme de deux séries convergentes et :

$H(X) = -p\,\ln p \times \dfrac{1}{1-q} - p\,\ln q \times \dfrac{q}{(1-q)^2}$, et comme $1 - q = p$:

$$\boxed{H(X) = -\ln p - \frac{q}{p}\ln q = \ln\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{q}{p}\ln\left(\frac{1}{q}\right)}$$

2. Sous réserve d'absolue convergence de l'intégrale :

(a) Une densité de X est égale à $\dfrac{1}{b-a}$ sur le segment $[a,b]$ et 0 en dehors, donc :

$$H(X) = -\int_a^b h\left(\frac{1}{b-a}\right) \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a} \ln(b-a) \,\mathrm{d}x = \ln(b-a)$$

$$\boxed{H(X) = \ln(b-a)}$$

(b) Une densité de X est égale à $\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et et 0 en dehors, donc :

$$H(X) = -\int_0^{+\infty} h\left(\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} \left(\ln\lambda - \lambda\, x\right) \mathrm{d}x = -\ln\lambda \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x}_{1} + \lambda \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda\, x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x}_{1/\lambda}.$$

On reconnait l'intégrale de la densité d'une loi exponentielle et son espérance, donc :

$$\boxed{H(X) = 1 - \ln\lambda}$$

(c) Une densité de X est égale à $\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}$ sur $\mathbb{R}$, donc :

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} h\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right)\right) \mathrm{d}x$$

$$H(X) = E\left(\frac{(X-m)^2}{2\,\sigma^2}\right) + \ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right) \times 1 = \frac{V(X)}{2\,\sigma^2} + \ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right)$$

$$\boxed{H(X) = \ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right) + \frac{1}{2}}$$

Partie II

1. (a) $H(X)$ existe donc $-\sum h(p_k)$ converge ; comme $p_k \leqslant 1$, on a $\ln(p_k) \leqslant 0$ donc $\sum h(p_k) \leqslant 0$ et $H(X) = -\sum h(p_k) \geqslant 0$.

$H(X) = 0 \iff$ tous les termes de la somme sont nuls, c'est à dire si $\ln(p_k) = 0$, ou encore $p_k = 1$, et ce $\forall k \in I_n$ ou $\mathbb{N}$. Comme $\sum p_k = 1$, on en déduit qu'il existe une seule valeur de k pour laquelle $P(X = p_k) \neq 0$; ce qui signifie que X est une variable presque certaine, qui prend la valeur k avec la probabilité 1.

(b) i. $-h(p_k) + p_k \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = p_k \ln\left(\dfrac{1}{p_k(n+1)}\right) \leqslant p_k \left(\dfrac{1}{p_k(n+1)} - 1\right) = \dfrac{1}{n+1} - p_k$

en posant $x = \dfrac{1}{p_k(n+1)}$ $\uparrow$ dans l'inégalité établie en préliminaire

ii. $H(X) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} h(p_k) \leqslant -\ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \sum_{k=0}^{n} p_k + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} - \sum_{k=0}^{n} p_k = \ln(n+1) = H(X_0).$

$H(X) = H(X_0)$ si et seulement si toutes les inégalités sont en fait des égalités, ce qui signifie que si $p_k \neq 0$, alors $\dfrac{1}{p_k(n+1)} = 1$, et ce pour tout $k \in I_n$; donc X suit une loi uniforme sur I_n.

(c) i. Sachant que l'espérance d'une variable aléatoire X_0 à support dans $\mathbb{N}$ qui suit une loi géométrique de paramètre p est égale à $\frac{p}{q}$, l'espérance de X est égale à celle de X_0 donc à $\frac{p}{q}$.

ii. Soit $k \in \mathbb{N}$, $-h(p_k) + p_k \ln p + k\, p_k \ln q = -p_k \ln(p_k) + p_k\big(\ln p + k \ln q\big) = p_k \ln\left(\dfrac{p\,q^k}{p_k}\right) \leqslant p_k \left(\dfrac{p\,q^k}{p_k} - 1\right)$

en posant $x = \dfrac{p\,q^k}{p_k}$ dans l'inégalité établie en préliminaire $\uparrow$

iii. En sommant ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} -h(p_k) + \ln p \sum_{k=0}^{+\infty} p_k + \ln q \sum_{k=0}^{+\infty} k\, p_k \leqslant p \sum_{k=0}^{+\infty} q^k - \sum_{k=0}^{+\infty} p_k$ soit $H(X) + \ln p \times 1 + \ln q \times E(X) \leqslant 0$

Comme $E(X) = \frac{q}{p}$, on obtient $H(X) \leqslant -\ln p - \dfrac{q}{p} \times \ln q = H(X_0)$

Si $H(X) = H(X_0)$, alors toutes les inégalités établies ci-dessus sont des égalités ; donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p\,q^k}{p_k} = 1$ et X suit une loi géométrique deparamètre p et de support $\mathbb{N}$.

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}$ donc $I = \ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right)}{2\sigma^2}\,E\left((X-m)^2\right)$

Comme $E\left((X-m)^2\right) = V(X) = \sigma^2$, on obtient $I = \dfrac{\ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right)}{2}$

D'autre part, $H(X_0) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x)\,\ln\left(f_0(x)\right)\mathrm{d}x = -\ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \times \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\mathrm{d}x =$ $-\dfrac{\ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right)}{2\,\sigma^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-m)^2\,\mathrm{e}^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\mathrm{d}x = -\frac{\ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right)}{2\sigma^2}\,E\left((X_0-m)^2\right) = -\frac{\ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right)}{2} = -I$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-h\Big(f(x)\Big) + f(x)\,\ln\Big(f_0(x)\Big) = f(x)\,\ln\left(\dfrac{f_0(x)}{f(x)}\right) \leqslant f(x)\left(\dfrac{f_0(x)}{f(x)} - 1\right) = f_0(x) - f(x)$

en posant $x = \frac{f_0(x)}{f(x)}$ dans l'inégalité établie en préliminaire $\uparrow$

(c) X admet une entropie, X_0 également, donc toutes les intégrales ci-dessous convergent et l'on a :
$H(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -h\Big(f(x)\Big)\,\mathrm{d}x \leqslant \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} -f(x)\,\ln\Big(f_0(x)\Big)\,\mathrm{d}x}_{H(X_0)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x)\,\mathrm{d}x}_{1} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}_{1} = H(X_0)$

(d) i. On raisonne par contraposée : s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $-h\Big(f(a)\Big) + f(a)\,\ln\Big(f_0(a)\Big) < f(a) - f_0(a)$, alors $H(X) < H(X_0)$

Soit donc un tel a, on note $d = f(a) - f_0(a) - \Big(-h\Big(f(a)\Big) + f(a)\,\ln\Big(f_0(a)\Big)\Big)$, $d > 0$.

La fonction $\varphi\ :\ x \longmapsto f(x) - f_0(x) - \Big(-h\Big(f(x)\Big) + f(x)\,\ln\Big(f_0(x)\Big)\Big)$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs positives, $\varphi(a) > 0$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\,,\ \varphi(x) \geqslant \dfrac{d}{2} > 0$

$H(X) - H(X_0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{a-\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}x}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}x}_{\geqslant \frac{d\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int_{a+\varepsilon}^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x}_{\geqslant 0} \geqslant \frac{d\varepsilon}{2} > 0$

Ainsi on en déduit que $H(X) = H(X_0) \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ -h\Big(f(x)\Big) + f(x)\,\ln\Big(f_0(x)\Big) = f_0(x) - f(x)$.

ii. D'après le préliminaire, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f_0(x)}{f(x)} = 1$, donc X et X_0 ont même densité sur $\mathbb{R}$ et suivent la même loi, $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$.