Corrigé du devoir surveillé n^{o}5

Problème 1

1. Soit $\varphi : x \mapsto |x|\,\mathrm{e}^{-|x|}$; φ est une fonction paire donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge $\iff$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge .

   Soit $A > 0$, $\forall x \in [0, A]$, $\varphi(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ et $\displaystyle\int_0^A x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\big]_0^A + \int_0^A \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[-x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\big]_0^A$

   $\displaystyle\int_0^A \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1 - (1+A)\,\mathrm{e}^{-A}$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1 ; d'ou :

   $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x \text{ est une intégrale convergente égale à } 2}$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = -\infty$ donc l'intégrale est grossièrement divergente en $-\infty$.

   On peut remarquer que l'intégrale est convergente en $+\infty$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ (question 1) mais ça ne change rien à la divergence.

3. (a) Distiguons les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$:

   Soit $x \geqslant 0$: $\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-|x|} > 0$ et $|x| = x$, donc $\displaystyle\left|\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+\alpha^2 e^{2x}}\right| = x \times \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\alpha^2 + \mathrm{e}^{-2x}} \leqslant \frac{|x|\,\mathrm{e}^{-|x|}}{\alpha^2}$

   Soit $x < 0$: $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-|x|} > 0$ donc $\displaystyle\left|\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+\alpha^2 e^{2x}}\right| = |x| \times \frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{1+\alpha^2 e^{2x}} \leqslant \frac{|x|\,\mathrm{e}^{-|x|}}{1}$

   Ainsi l'inégalité est vérifiée pour tout x réel en prenant par exemple $C_\alpha = \max\left(\frac{1}{\alpha^2}, 1\right)$.

   (b) Notons φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\displaystyle\varphi_\alpha(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+\alpha^2 e^{2x}}$; on a $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant |\varphi_\alpha(x)| \leqslant C_\alpha\,|x|\,\mathrm{e}^{-|x|}$.

   $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$ converge, donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+\alpha^2 e^{2x}}\right| \mathrm{d}x$ converge.

   $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+\alpha^2 e^{2x}}\,\mathrm{d}x \text{ est une intégrale absolument convergente, donc convergente}}$$

4. (a) Soient A et B deux réels tels que $A < B$: $\displaystyle\int_A^B \frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+\alpha^2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = -\int_{-A}^{-B} \frac{-u\,\mathrm{e}^{-u}}{1+\alpha^2\mathrm{e}^{-2u}}\,\mathrm{d}u$

   $$= -\int_{-B}^{-A} \frac{u\,\mathrm{e}^u}{\alpha^2+\mathrm{e}^{2u}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\alpha^2}\int_{-B}^{-A} \frac{u\,\mathrm{e}^u}{1+\frac{\mathrm{e}^{2u}}{\alpha^2}}\,\mathrm{d}u$$

   Lorsque $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+\alpha^2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\,\mathrm{e}^u}{1+\frac{\mathrm{e}^{2u}}{\alpha^2}}\,\mathrm{d}u$, soit

   $$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ f(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}\, f\left(\frac{1}{\alpha}\right), \text{ donc } f(1) = 0}$$

   (b) $\displaystyle\int_A^B \frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+\alpha^2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int_{A+\ln|\alpha|}^{B+\ln|\alpha|} \frac{(t-\ln|\alpha|)\,\mathrm{e}^t}{|\alpha|\big(1+\mathrm{e}^{2t}\big)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|\alpha|}\int_{A+\ln|\alpha|}^{B+\ln|\alpha|} \frac{t\,\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t - \frac{\ln|\alpha|}{|\alpha|}\int_{A+\ln|\alpha|}^{B+\ln|\alpha|} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$

   $\displaystyle\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \frac{1}{|\alpha|}\int_{A+\ln|\alpha|}^{B+\ln|\alpha|} \frac{t\,\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|\alpha|}\, f(1) = 0$ et $\displaystyle\int_{A+\ln|\alpha|}^{B+\ln|\alpha|} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{Arctan}\,\big(\mathrm{e}^t\big)\Big]_{A+\ln|\alpha|}^{B+\ln|\alpha|}$

   Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+\alpha^2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln|\alpha|}{|\alpha|}\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \Big(\mathrm{Arctan}\,\big(\mathrm{e}^{B+\ln|\alpha|}\big) - \mathrm{Arctan}\,\big(\mathrm{e}^{A+\ln|\alpha|}\big)\Big) = -\frac{\pi\,\ln|\alpha|}{2\,|\alpha|}$

Problème 2

Partie A

1. $\operatorname{rg}(A-\lambda I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-4\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 3-4\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-4\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-4\lambda & 0 & 0 \\ 3(3-4\lambda) & (3-4\lambda)^2-1 & 0 \\ 3 & (3-4\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow (3-4\lambda)\,L_2 - L_3 \\ \leftarrow L_2 \end{matrix}$

   $1-(3-4\,\lambda)^2 = (4-4\,\lambda)\,(-2+4\,\lambda)$ donc $\operatorname{rg}(A-\lambda\,I) = 3 \iff \lambda \notin \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

   $$\boxed{\operatorname{rg}(A-\lambda\,I) = \iff \lambda \notin \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\} \text{ et sinon } \operatorname{rg}(A-\lambda\,I) < 3}$$

2. $A - \frac{1}{4}\,I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A - \frac{1}{2}\,I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A - I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Donc $\Big(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\Big) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right)$; pour chacune de ces valeurs, on a bien $\operatorname{rg}(A-\lambda\,I) = 2$.

3. $\ker\left(A - \frac{1}{4}\,I\right) = \operatorname{Vect}\left({}^t(1,-2,1)\right)$ $\ker\left(A - \frac{1}{2}\,I\right) = \operatorname{Vect}\left({}^t(0,-1,1)\right)$ et $\ker(A-I) = \operatorname{Vect}\left({}^t(0,1,1)\right)$.

   $$\boxed{u_1 = {}^t(1,-2,1),\ u_2 = {}^t(0,-1,1),\ u_3 = {}^t(0,1,1)}$$

4. $\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ est une famille formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Toute famille libre de $\mathbb{R}^3$ engendre $\mathbb{R}^3$, par conséquent $\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. La matrice de passage est égale à $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. La matrice de f dans cette base est diagonale.

   $$\boxed{B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = P^{-1}\,M\,P}$$

Partie B

1. $Y'(t) = M\,Y(t)$ est l'écriture matricielle du système $(\mathcal{S})$; les deux sont donc équivalents.

2. Les relations $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = P\,Z(t),\ Y'(t) = P\,Z'(t)$ et $M = P\,B\,P^{-1}$ permettent d'écrire $\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = M\,Y(t) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ P\,Z'(t) = P\,B\,P^{-1} \times P\,Z(t)$, d'où par produit à gauche par P^{-1} :

   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ Z'(t) = B\,Z(t)}$$

3. Le système matriciel précédent s'écrit :

   $\forall t \in \mathbb{R} \left\{\begin{array}{lcl} U'(t) & = & U(t) \\ V'(t) & = & \frac{1}{2}\,V(t) \\ W'(t) & = & \frac{1}{2}\,W(t) \end{array}\right.$ donc il existe des constantes réelles α, β, γ telles que

   $\forall t \in \mathbb{R},\ U(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{t/4},\ V(t) = \beta\,\mathrm{e}^{t/2}$ et $W(t) = \gamma\,\mathrm{e}^{t}$

   D'autre part, $Z(0) = P^{-1}Y(0)$, donc $U(0) = 1,\ V(0) = -1$ et $W(0) = 3$, donc $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,-1,3)$; ainsi :

   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ Z(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t/4} \\ -\mathrm{e}^{t/2} \\ 3\,\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}}$$

4. Le vecteur $Y(t)$ vaut $P\,Z(t)$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{t/4} \\ -e^{t/2} \\ 3\,e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t/4} \\ -2\,e^{t/4} + e^{t/2} + 3\,e^{t} \\ e^{t/4} - e^{t/2} + 3\,e^{t} \end{pmatrix}$

D'où l'unique triplet solution $(u,\ v,\ w)$ défini par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = e^{t/4},\ v(t) = -2\,e^{t/4} + e^{t/2} + 3\,e^{t} \text{ et } w(t) = e^{t/4} - e^{t/2} + 3\,e^{t}}$$

Problème 3

1. (a) Soit E un sous-espace de dimension 1 stable par f, alors pour tout vecteur u non nul de E, on a $f(u) \in E$ et comme E est de dimension 1, $f(u)$ est colinéaire à u. Ainsi les sous-espaces cherchés ne sont autres que les droites incluses dans les sous-espaces propres de f. On résout $f(u) = \lambda\,u$ où $u = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(u) = \lambda\,u \iff (f - \lambda\,\mathrm{Id})(u) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} (3-\lambda)\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & & & + & (2-\lambda)\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} y & - & z & + & (3-\lambda)\,x & = & 0 \\ & & (2-\lambda)\,z & - & (\lambda^2 - 4\lambda + 2)\,x & = & 0 \\ & & (2-\lambda)\,z & + & 2\,x & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 + (\lambda - 1)\,L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} y & - & z & + & (3-\lambda)\,x & = & 0 \\ & & (2-\lambda)\,z & - & (\lambda^2 - 4\lambda + 2)\,x & = & 0 \\ & & & + & \underbrace{(\lambda^2 - 4\lambda + 4)}_{(\lambda-2)^2}\,x & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

Si $\lambda \neq 2$, alors le système admet un unique triplet solution : $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, donc la seule droite vectorielle stable par f est le sous-espace propre associé à la valeur $\lambda = 2$

Pour $\lambda = 2$, le système devient :

$\left\{\begin{array}{rcl} y - z + x & = & 0 \\ 2\,x & = & 0 \end{array}\right.$ donc le sous-espace propre E_2 est la droite vectorielle engendrée par ${}^t(0, 1, 1)$.

$$\boxed{\text{L'unique sous-espace de dimension 1 stable par } f \text{ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur } {}^t(0, 1, 1).}$$

(b) Calcul immédiat : ${}^tX\,Y = (x\,y\,z) \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x\,x' + y\,y' + z\,z' = (x'\,y'\,z') \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^t\,Y\,X.$

(c) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et soient X et Y les vecteurs colonnes de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ associés. $Z = A\,X$ et $T = A\,Y$ sont les vecteurs colonnes associés à $f(\vec{u})$ et $f(\vec{u})$ respectivement.
$\langle\, \vec{u}\,,\, f(\vec{v})\,\rangle = {}^tX\,A\,Y = {}^t({}^tA\,X)\,Y = \langle\, g(\vec{u})\,,\, \vec{v}\,\rangle$

2. (a) On montre tout d'abord que $P^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$:
— $P^\perp$ est inclus dans $\mathbb{R}^3$ par définition.
— $P^\perp$ est non vide, car quel que soit $\vec{u} \in P$, $\langle\, \vec{u}\,,\, \vec{0}\,\rangle = 0$ (donc $\vec{0} \in P^\perp$).
— $P^\perp$ est stable par combinaison linéaire : soient $\vec{u} \in P$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs de $P^\perp$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$
$\langle\, (\vec{v} + \lambda\,\vec{w})\,,\, \vec{u}\,\rangle = \underbrace{\langle\, \vec{v}\,,\, \vec{u}\,\rangle}_{0 \text{ car } \vec{v} \in P^\perp} + \lambda\,\underbrace{\langle\, \vec{w}\,,\, \vec{u}\,\rangle}_{0 \text{ car } \vec{w} \in P^\perp} = 0.$

On montre ensuite que $P^\perp$ est de dimension 1 : soit $(\vec{u_1}\,,\, \vec{u_2})$ une base de P, on pose $\vec{u_1} = (a, b, c)$ et $\vec{u_2} = (a', b', c')$

Tout vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$ de $P^\perp$ vérifie $\langle\, \vec{v}\,,\, \vec{u_1}\,\rangle = 0$ donc $a\,x + b\,y + c\,z = 0$
et $\langle\, \vec{v}\,,\, \vec{u_2}\,\rangle = 0$ donc $a'\,x + b'\,y + c'\,z = 0$

Ainsi $\vec{v} \in P^\perp \iff a\,x + b\,y + c\,z = a'\,x + b'\,y + c'\,z = 0$. Les deux équations ne sont pas équivalentes, sinon $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ seraient colinéaires, donc $P^\perp$ est une droite engendrée par $\begin{pmatrix} c'b - c\,b' \\ a'c - a\,c' \\ b'a - b\,a' \end{pmatrix}$.

On peut également remarquer que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u_1}$ est un plan (d'équation $a\,x + b\,y + c\,z = 0$), de même pour ceux orthogonaux à $\vec{u_2}$, et l'intersection de deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$ est une droite.

(b) On a montré à la question précédente que $P^\perp$ est une droite, reste à prouver qu'elle est stable par g :
Soient $\vec{v} \in P^\perp$ et $\vec{u} \in P$, $\langle\, g(\vec{v})\,,\, \vec{u}\,\rangle = \langle\, \vec{v}\,,\, f(\vec{u})\,\rangle = 0$ car $f(\vec{u}) \in P$.
Ceci est vrai pour tout $\vec{u} \in P$, donc $g(\vec{v}) \in P^\perp$, et ce, pour tout vecteur $\vec{v}$ de $P^\perp$; ainsi $P^\perp$ est stable par g.

(c) Par le même raisonnement qu'à la question 1a, les droites vectorielles stables par g s'obtiennent à partir des sous-espaces propres de g.
La matrice de g dans la base canonique est ${}^tA$; or A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres (ici 2), donc il suffit de calculer l'espace propre de ${}^tA$ associé à 2 :

$$\left({}^tA - 2\,I\right) X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right. \iff x = y = -z$$

$$\boxed{\text{Il existe une unique droite stable par } g\text{, engendrée par le vecteur } {}^t(1,1,-1).}$$

(d) Par définition, $D^\perp$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{v} = {}^t(x,y,z)$ orthogonaux à $\vec{u}$, c'est à dire tels que $\langle\, \vec{v}\,,\, \vec{u}\,\rangle = 0$
Or $\langle\, \vec{v}\,,\, \vec{u}\,\rangle = a\,x + b\,y + c\,z$, d'où l'équation annoncée, qui est bien celle d'un plan, à condition que $\vec{u}$ soit non nul.

(e) Soit P un plan stable par f ; alors $P^\perp$ est une droite stable par g, donc nécessairement Vect $\Big({}^t(1,1,-1)\Big)$.
Ainsi l'unique plan stable par g est l'orthogonal de cette droite, et une équation cartésienne de ce plan est : $x + y - z = 0$.
Réciproquement, on vérifie que ce plan est bien stable par f : soit $\vec{v} = {}^t(x,y,x+y) \in P$,

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,(x+y) \\ 4\,x + 2\,y \end{pmatrix}, \text{ donc } f(\vec{v}) \in P.$$

Remarque : de façon assez logique, l'unique plan stable par f contient l'unique droite stable par f.