MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°4
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice n'est pas autorisé pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de support $\mathbb{N}$ et de paramètre $p \in]0,1]$.

1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$

(a) Précisez l'espérance et la variance de Z_n.

(b) Montrer par récurrence sur j que : $\forall j \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{j} \binom{k+n-1}{k} = \binom{j+n}{j}$.

(c) Justifier l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall j \in \mathbb{N},\ [Z_{n+1} = j] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{j} \left([Z_n = k] \cap [X_{n+1} = j-k]\right)$.

(d) Précisez $Z_n(\Omega)$ et montrer par récurrence sur n que :

$$\forall j \in Z_n(\Omega),\ \mathrm{P}(Z_n = j) = \binom{j+n-1}{j} \times p^n \times q^j$$

2. On considère désormais une autre variable aléatoire réelle N définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que les variables N, X_1, X_2, …, X_n, … soient mutuellement indépendantes.
On pose :

$$Z = \sum_{k=1}^{N} X_k \quad \text{ce qui signifie :} \quad \forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$$

avec la convention suivante : si $N(\omega) = 0$, alors $Z(\omega) = 0$.

(a) Déterminer selon les valeurs de j la valeur de $\mathrm{P}([N = 0] \cap [Z = j])$.

(b) Soient i et j deux entiers naturels quelconques.
Exprimer $\mathrm{P}([N = i] \cap [Z = j])$ en fonction de $\mathrm{P}(N = i)$.

La réponse ne sera validée que si vous indiquez clairement comment vous utilisez l'hypothèse d'indépendance mutuelle de l'énoncé !

(c) On suppose que N admet une espérance.

- En déduire que Z admet pour espérance : $\mathrm{E}(Z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N = i) \times \mathrm{E}(Z_i)$
- Exprimer alors cette espérance en fonction de celle de N.

3. Nous reprendrons ici les notations de la question **??**.
Nous supposerons en outre que N est distribuée selon la Loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$ et que p vaut $\frac{4}{5}$.

(a) Précisez en utilisant le résultat obtenu en **??** l'espérance de Z.

(b) Montrer que $\mathrm{P}(Z = 0)$ vaut $\dfrac{1}{e}$, que $\mathrm{P}(Z = 1)$ vaut $\dfrac{4}{5e}$ et que que $\mathrm{P}(Z = 2)$ vaut $\dfrac{12}{25e}$.

PROBLEME

Ce problème a pour objet l'étude d'un jeu très populaire aux États-Unis : **le jeu de craps.**
Le joueur lance simultanément deux dés non pipés et l'on observe, pour chaque lancer, la somme des points sur les dés.

- Le joueur gagne au premier lancer si cette somme vaut 7 ou 11.
- Le joueur perd au premier lancer si cette somme vaut 2, 3 ou 12.
- Dans les autres cas, le joueur doit alors relancer les 2 dés jusqu'à ce qu'il obtienne à nouveau la somme initiale ou un 7.
  — S'il réussit à obtenir cette somme avant d'obtenir un 7, il gagne.
  — S'il obtient un 7 avant d'obtenir la somme initiale, il perd.

1. **Étude du jet simultané de deux dés non pipés.**
   On note $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \,/\, 1 \leq x \leq 6 \text{ et } 1 \leq y \leq 6\right\}$ l'ensemble des résultats possibles.
   On munit Ω de la probabilité uniforme P.
   On note S la variable aléatoire définie sur Ω par $S(x, y) = x + y$.

   (a) Décrire la loi de probabilité de S et calculer son espérance $E(S)$ et sa variance $V(S)$.

   (b) Vérifier que, pour tout entier k vérifiant $2 \leq k \leq 7$, on a :
   $$P\left(S = 14 - k\right) = P\left(S = k\right) = \frac{k-1}{36}$$

   (c) Vérifier que, pour tout entier k vérifiant $7 \leq k \leq 12$, on a :
   $$P\left(S = 14 - k\right) = P\left(S = k\right) = \frac{13-k}{36}$$

   (d) Calculer $P\left(S \in \{k, 7\}\right)$ pour $k \in \{4; 5; 6\}$ puis pour $k \in \{8; 9; 10\}$.

2. **Gagner au craps**.
   Intéressons nous à une partie de craps : jeu décrit en introduction.
   Nous considérerons les lancers comme des épreuves indépendantes dont l'univers des résultats est, pour chacune d'elles : $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \,/\, 1 \leq x \leq 6 \text{ et } 1 \leq y \leq 6\right\}$ muni de la probabilité uniforme.
   Nous désignerons par
   - P la probabilité relative à cette répétition d'épreuves indépendantes
   - S_n la somme des points obtenus sur les deux dés au $n^{\text{ième}}$ lancer.
   - G_n l'événement : ≪ le joueur gagne au $n^{\text{ième}}$ lancer ≫.
   - D l'événement : ≪ le joueur gagne à partir du second lancer ≫.

   (a) Déterminer la probabilité de G_1.

   (b) Dans cette question k est un entier tel que $k \in \{4; 5; 6\}$.

      i. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.
      — Exprimer clairement l'événement $G_n \cap [S_1 = k]$.
      — En déduire que la probabilité conditionnelle de G_n sachant $[S_1 = k]$ vaut
      $$P_{S_1=k}\left(G_n\right) = \frac{k-1}{36}\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2}$$

      ii. En déduire que la probabilité que le joueur gagne à partir du second lancer sachant $[S_1 = k]$ vaut
      $$P_{S_1=k}\left(D\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{k-1}{36}\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2} = \frac{k-1}{k+5}$$

   (c) Dans cette question k est un entier tel que $k \in \{8; 9; 10\}$.
   Déterminer la probabilité que le joueur gagne à partir du second lancer sachant $[S_1 = k]$.

(d) En déduire que la probabilité que le joueur gagne à partir du second lancer vaut :

$$P(D) = 2\sum_{k=4}^{6}\left(\frac{k-1}{k+5}\times\frac{k-1}{36}\right)$$

(e) En déduire la probabilité de l'événement G : « le joueur gagne ». Vérifier que le craps n'est pas un jeu trop « voleur », c'est-à-dire que la probabilité pour que le joueur gagne est très peu inférieure à $0,5$.

3. Longueur d'une partie de craps.

Nous conserverons les notations utilisées aux questions 1 et 2 et désignerons par T la durée d'une partie. Autrement dit, si ω est le résultat d'une partie de craps :

$$T(\Omega) = \begin{cases} k & \text{si} \quad \text{le joueur gagne ou perd au } k^{\text{ième}}\text{lancer} \\ +\infty & \text{si} \quad \text{la partie ne se termine pas} \end{cases}$$

(a) Prouver que pour tout $k \in \{4;5;6;8;9;10\}$, on a :

$$\frac{9}{36} \leq P\left(S \in \{k,7\}\right) \leq \frac{11}{36}$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$:

$$P\left(\overline{T \leq n}\right) \leq \left(\frac{27}{36}\right)^n$$

(c) En déduire que toute partie de craps se termine presque sûrement.

(d) La variable aléatoire T est donc presque sûrement définie. Nous nous proposons d'en déterminer l'espérance. Nous désignerons par :

— α_n : la probabilité de gagner au $n^{ième}$ lancer.

— β_n : la probabilité de perdre au $n^{ième}$ lancer.

i. Déterminer α_1 et β_1.

ii. Pour tout $k \in \{4;5;6;8;9;10\}$ et tout entier $n \geq 2$, rappeler la valeur de la probabilité conditionnelle de G_n sachant $[S_1 = k]$.
En déduire la valeur de α_n.

iii. Pour tout $k \in \{4;5;6;8;9;10\}$ et tout entier $n \geq 2$, déterminer la probabilité conditionnelle de perdre au $n^{\text{ième}}$ coup sachant $[S_1 = k]$.
En déduire la valeur de β_n

iv. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T.

4. Simulation

```
NbSimul=10000; N1=0; N2=0; duree=0;
for i=1:NbSimul
    S=ceil(6*rand)+ceil(6*rand);
    Res=S;
    if S==2|S==3|S==12
        fin=1; N2=N2+1;
    elseif S==7|S==11
        fin=1; N1=N1+1;
    else fin=0;
    end
    while not(fin)
        T=ceil(6*rand)+ceil(6*rand);
        Res=[Res T];
        if T==S
            fin=1; N1=N1+1;
        elseif T==7
            fin=1; N2=N2+1;
        end
    end
    duree=duree+length(Res);
end
duree=duree/NbSimul
```

Après exécution de ce programme MATLAB, que représentent exactement les valeurs des variables N1, N2 et « duree » ? Que valent-elles approximativement ?