Corrigé du devoir surveillé n^{o}4

Exercice

1. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ à support dans $\mathbb{N}$, donc $E(X_k) = \dfrac{q}{p}$ et $V(X_k) = \dfrac{q}{p^2}$.

Par linéarité de l'espérance $E(Z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$; et $V(Z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k)$ car les variables $X_{k,\, k\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

$$\boxed{E(Z_n) = \frac{n\,q}{p}\ ,\ V(Z_n) = \frac{n\,q}{p^2}}$$

(b) Soit $\mathscr{P}_j : \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{j} \binom{k+n-1}{k} = \binom{j+n}{j}$

La formule est évidente pour $j = 0$, car la somme ne comporte qu'un terme, celui d'indice 0 justement.

Soit $j \in \mathbb{N}$, supposons qu'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{j} \binom{k+n-1}{k} = \binom{j+n}{j}$

$$\sum_{k=0}^{j+1} \binom{k+n-1}{k} = \sum_{k=0}^{j} \binom{k+n-1}{k} + \binom{j+n}{j+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hypothèse de} \\ \text{récurrence}}}{=} \binom{j+n}{j} + \binom{j+n}{j+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formule de} \\ \text{Pascal}}}{=} \binom{j+1+n}{j+1}$$

La formule est donc vraie pour tout entier j.

(c) $Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1}$ et les événements $[X_{n+1} = k], k \in \mathbb{N}$ forment un système complet, donc

$[Z_{n+1} = j] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty} \Big([Z_n = k] \cap [X_{n+1} = j-k]\Big)$

Les événements $[X_{n+1} = j-k]$ étant impossibles pour $j - k < 0$, la réunion précédente se limite à $k \leqslant j$, d'où l'égalité annoncée.

(d) Pour tout entier k, $X_k(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $Z_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$

$Z_1 = X_1$, donc $\forall j \in \mathbb{N},\ P(Z_1 = j) = \dbinom{j}{j} \times p^1 \times q^j$, donc la formule est vraie pour $n = 1$.

Soit $n \geqslant 1$ fixé, on suppose que $\forall j \in \mathbb{N},\ P(Z_n = j) = \dbinom{j+n-1}{j} \times p^n \times q^j$

D'après l'égalité établie à la question 1c, $\forall j \in \mathbb{N},\ P(Z_{n+1} = j) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{réunion} \\ \text{disjointe}}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{j} P\Big([Z_n = k] \cap [X_{n+1} = j-k]\Big)$

Les variables X_k sont mutuellement indépendantes, donc en particulier X_{n+1} est indépendante de Z_n, ainsi pour tous k et j, les événements $[Z_n = k]$ et $[X_{n+1} = j-k]$ sont indépendants.

$$\begin{aligned} \text{Finalement } \forall j \in \mathbb{N},\ P(Z_{n+1} = j) &= \sum_{k=0}^{j} P\Big(Z_n = k) \times P\big(X_{n+1} = j-k\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{j} \binom{j+n-1}{j} p^n\, q^j \times (p\, q^{j-k}) = p^{n+1}\, q^j \sum_{k=0}^{j} \binom{j+n-1}{j} \end{aligned}$$

D'après la formule établie question 1b, on obtient $\forall j \in \mathbb{N},\ P(Z_{n+1} = j) = p^{n+1}\, q^j \dbinom{j+n}{j}$, ce qui démontre la formule annoncée.

2. (a) Si $N(\omega) = 0$, alors $Z(\omega) = 0$ donc l'événement $[N = 0]$ est inclus dans $[Z = 0]$, et pour $j > 0$, les événements $[Z = j]$ et $[N = 0]$ sont incompatibles.

Ainsi, pour $j > 0$, $P\big([N = 0] \cap [Z = j]\big) = 0$ et $P\big([N = 0] \cap [Z = 0]\big) = P(N = 0)$.

$$\boxed{P\big([N = 0] \cap [Z = 0]\big) = P(N = 0) \text{ et } \forall j \in \mathbb{N}^*,\ P\big([N = 0] \cap [Z = j]\big) = 0}$$

(b) Soit $i>0$: $P\big([N=i]\cap[Z=j]\big)=P(N=i)\times P_{[N=i]}(Z=j)=P(N=i)\times P\left(\sum_{k=1}^{i}X_k=j\right)=$ $P(N=i)\times P\left(Z_i=j\right)$, les valeurs pour $i=0$ ont été calculées précédemment, donc :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall i>0,\ \forall j\in\mathbb{N}, & P\big([N=i]\cap[Z=j]\big)=P(N=i)\times\binom{j+i-1}{j}p^iq^j \\ \forall j>0, & P\big([N=0]\cap[Z=j]\big)=0 \\ & P\big([N=0]\cap[Z=0]\big)=P(N=0) \end{array}}$$

(c) Sous réserve d'existence, l'espérance de Z est égale à : $E(Z)=\sum_{j=0}^{\infty}j\,P(Z=j)=\sum_{j=1}^{\infty}j\,P(Z=j)$.

Les événements $[N=i],\ i\in\mathbb{N}$ forment un système complet, donc $P(Z=j)=\sum_{i=0}^{\infty}P\big([N=i]\cap[Z=j]\big)$

On calcule cette somme pour $j>0$, puisque $j=0$ n'intervient pas dans le calcul de l'espérance :

$P(Z=j)=\underbrace{P\big([N=0]\cap[Z=j]\big)}_{0}+\sum_{i=1}^{\infty}P\big([N=i]\cap[Z=j]\big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(N=i)\,P(Z_i=j)$

$\sum_{j=1}^{n}j\,P(Z=j)=\sum_{j=1}^{n}j\left(\sum_{i=1}^{\infty}P(N=i)\,P(Z_i=j)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(P(N=i)\sum_{j=1}^{n}j\,P(Z_i=j)\right)$

$0\leqslant\sum_{j=1}^{n}j\,P(Z_i=j)<\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}j\,P(Z_i=j)=E(Z_i)=\dfrac{i\,q}{p}$, donc

$0\leqslant P(N=i)\sum_{j=1}^{n}j\,P(Z_i=j)<\dfrac{q}{p}\Big(i\,P(N=i)\Big)$ qui est le terme général d'une série convergente puisque $E(N)$ existe. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{j=1}^{n}j\,P(Z=j)$ converge et vaut $\sum_{i=1}^{\infty}\left(P(N=i)\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}j\,P(Z_i=j)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(N=i)\,E(Z_i)=\sum_{i=0}^{\infty}P(N=i)\,E(Z_i)$ car Z_0 est la variable constante égale à 0.

$E(Z_i)=\dfrac{i\,q}{p}$ donc $E(Z)=\sum_{i=0}^{\infty}P(N=i)\,\dfrac{i\,q}{p}=\dfrac{q}{p}\,E(N)$, d'où

$$\boxed{E(Z)=\frac{q}{p}\,E(N)}$$

3. (a) Lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre 5, $E(N)=5$, $q=\frac{1}{5}$ donc $\boxed{E(Z)=\dfrac{5}{4}}$

(b) On reprend l'expression établie question 2c :

$\star$ $P(Z=0)=\sum_{i=0}^{\infty}P\big([N=i]\cap[Z=0]\big)=P\big([N=0]\cap[Z=0]\big)+\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-5}\times5^i}{i!}\left(\dfrac{4}{5}\right)^i=\mathrm{e}^{-5}+\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-5}\times4^i}{i!}$

$P(Z=0)=\mathrm{e}^{-5}\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{4^i}{i!}=\mathrm{e}^{-5}\times\mathrm{e}^4=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$\star$ $P(Z=1)=\sum_{i=0}^{\infty}P\big([N=i]\cap[Z=1]\big)=\sum_{i=1}^{\infty}P\big([N=i]\cap[Z_i=1]\big)=\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-5}\times5^i}{i!}\,i\left(\dfrac{4}{5}\right)^i\left(\dfrac{1}{5}\right)$

Par changement d'indice $(j=i-1)$ on obtient : $P(Z=1)=\dfrac{\mathrm{e}^{-5}}{5}\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{4^{j+1}}{j!}=\dfrac{\mathrm{e}^{-5}\times4}{5}\times\mathrm{e}^4=\dfrac{4}{5\,\mathrm{e}}$

$\star$ $P(Z=2)=\sum_{i=0}^{\infty}P\big([N=i]\cap[Z=2]\big)=\sum_{i=1}^{\infty}P\big([N=i]\cap[Z_i=2]\big)=\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-5}\times5^i}{i!}\binom{i+1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^i\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$

$$P(Z=2) = \frac{\mathrm{e}^{-5}}{5^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4^i}{i!}\times\frac{i\,(i+1)}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-5}}{2\times 5^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{4^{j+1}}{j!}\times(j+2) = \frac{2\,\mathrm{e}^{-5}}{5^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j\,4^j}{j!}+2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{4^j}{j!}\right)$$

$P(Z=2) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{-5}}{5^2}\left(4\,\mathrm{e}^4+2\,\mathrm{e}^4\right) = \dfrac{12}{25\,\mathrm{e}}$, ce qui est conforme aux résultats annoncés.

Problème

1. **Jet simultané de deux dés non pipés.**

   (a) $S(\Omega) = [\![2,12]\!]$ et la loi de probabilité est

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(S) = \sum_{k=2}^{12} k\,P(S=k) = 2\times\frac{1}{36}+\left(3\times\frac{2}{36}\right)+\left(4\times\frac{3}{36}\right)+\cdots\cdots+\left(11\times\frac{2}{36}\right)+\left(12\times\frac{1}{36}\right) = 7$$

$$V(S) = E\Big((S-7)^2\Big) = \left((-5)^2\times\frac{1}{36}\right)+\left((-4)^2\times\frac{2}{36}\right)+\cdots+\left(4^2\times\frac{2}{36}\right)+\left(5^2\times\frac{1}{36}\right) = \frac{35}{6}$$

   (b) La loi de S est symétrique par rapport à 7, donc pour tout $k\in[\![2,6]\!]$, $P(S=14-k)=P(S=k)=\dfrac{k-1}{7}$ et pour $k=7$, on a $k=14-k$.

   (c) En prenant $j=14-k$, on a $14-k=j$ et $k-1=13-j$, donc pour tout $k\in[\![8,14]\!]$, $P(S=14-j) = P(S=j)=\dfrac{13-j}{7}$, et pour $k=7$ cela ne change rien.

   Remarque : on aurait pu, en utilisant les résultats des deux questions précédentes, calculer simplement l'espérance et la variance de S :

$$E(S) = \sum_{k=2}^{6} k\times\frac{k-1}{36}+7\times\frac{6}{36}+\sum_{k=2}^{6}(14-k)\times\frac{k-1}{36} = \frac{14}{36}\sum_{k=2}^{6}(k-1)+7\times\frac{6}{36} = 7 \text{ et}$$

$$V(S) = E\Big((S-7)^2\Big) = 2\sum_{k=2}^{7}(k-7)^2\times\frac{k-1}{36} = \frac{1}{18}\sum_{j=0}^{5} j^2(6-j) \text{ (en posant } j=7-k)$$

   (d) Pour $k\in\{4,5,6\}$, $P\big(S\in\{k,7\}\big) = \dfrac{k-1+6}{36} = \dfrac{k+5}{36}$ et pour $k\in\{8,9,10\}$, $P\big(S\in\{k,7\}\big) = \dfrac{13-k+6}{36} = \dfrac{19-k}{36}$

$$\boxed{P\big(S\in\{k,7\}\big) = \frac{k+5}{36} \text{ si } k\in\{4,5,6\} \text{ et } P\big(S\in\{k,7\}\big) = \frac{19-k}{36} \text{ si } k\in\{8,9,10\}}$$

2. **Gagner au craps.**

   (a) G_1 est réalisé si le joueur obtient 7 ou 11 au premier lancer, donc $P(G_1) = P(S=7 \text{ ou } 11) = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

   (b) i. Lorsque $S_1=k$, G_n est réalisé si le joueur n'obtient ni la somme k ni la somme 7 jusqu'au $n-1^{\mathrm{e}}$ lancer inclus, puis obtient k au n^{e} lancer :

   $\Big(G_n\cap[S_1=k]\Big) = [S_1=k]\cap\left(\bigcap_{i=2}^{n-1}\big[S_i\notin\{k,7\}\big]\right)\cap[S_n=k]$; les résultats des lancers étant indépendants, $P_{[S_1=k]}\big(G_n\big) = \dfrac{P\big(G_n\cap[S_1=k]\big)}{P(S_1=k)} = P\left(\bigcap_{i=2}^{n-1}\big[S_i\notin\{k,7\}\big]\cap[S_n=k]\right) = \left(1-\dfrac{k+5}{36}\right)^{n-2}\times\left(\dfrac{k-1}{36}\right)$

   ii. L'événement «Le joueur gagne à partir du 2[e] lancer sachant qu'il a obtenu k au premier» est réalisé si et seulement si G_n est réalisé pour un certain $n\geqslant 2$. Ces événements étant incompatibles, on a $P_{[S_1=k]}(D) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}P_{[S_1=k]}(G_n) = \frac{k-1}{36}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2} = \frac{k-1}{36}\times\left(\frac{1}{1-\frac{31-k}{36}}\right) = \frac{k-1}{k+5}$.

(c) De même que précédemment, on a $P_{[S_1=k]}\big(G_n\big) = \dfrac{P\big(G_n \cap [S_1 = k]\big)}{P(S_1 = k)} = P\left(\bigcap_{i=2}^{n-1} [S_i \notin \{k,7\}] \cap [S_n = k]\right) = \left(1 - \dfrac{19-k}{36}\right)^{n-2} \times \left(\dfrac{13-k}{36}\right)$, puis $P_{[S_1=k]}\big(D\big) = \sum_{n=2}^{\infty} P_{[S_1=k]}\big(G_n\big) = \dfrac{13-k}{36} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{17+k}{36}\right)^{n-2} = \dfrac{13-k}{36} \times \left(\dfrac{1}{1 - \frac{17+k}{36}}\right) = \dfrac{13-k}{19-k} = \dfrac{(14-k)-1}{(14-k)+5}$.

(d) Les événements $[S_1 = k]$ pour $k \in [\![2, 12]\!]$ forment un système complet, mais la probabilité que le joueur gagne à partir du deuxième lancer est nulle lorsque $k = 2, 3$ ou 12 (puisqu'il perd dès le premier lancer) ou lorsque $k = 7$ oui 11 (il a alors gagné dès le premier lancer).

Par conséquent
$$P(D) = \sum_{k=4}^{6} P(S_1 = k)\, P_{[S_1=k]}\big(D\big) + \sum_{k=8}^{10} P(S_1 = k)\, P_{[S_1=k]}\big(D\big)$$
$$= \sum_{k=4}^{6} \frac{k-1}{36} \times \frac{k-1}{k+5} + \sum_{k=8}^{10} \frac{13-k}{36} \times \frac{(14-k)-1}{(14-k)+5} = 2\sum_{k=4}^{6} \frac{k-1}{36} \times \frac{k-1}{k+5}$$
(en posant $j = 13 - k$ dans la deuxième somme).

(e) Le joueur a gagné s'il gagne au premier lancer, ou à partir du deuxième, donc $P(Gagner) = P(G_1) + P(D) = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{18}\left(\dfrac{(4-1)^2}{9} + \dfrac{(5-1)^2}{10} + \dfrac{(6-1)^2}{11}\right) = \dfrac{244}{495} \simeq 0,493$

3. (a) Pour $k \in \{4, 5, 6\}$, $P\big(S \in \{k, 7\}\big) = \dfrac{k+5}{36}$ donc $\dfrac{4+5}{36} \leqslant P\big(S \in \{k, 7\}\big) \leqslant \dfrac{6+5}{36}$, de même pour $k \in \{8, 9, 10\}$ puisqu'on retrouve les mêmes probabilités que pour 4, 5 et 6.

(b) L'événement $[T \leqslant n]$ est réalisé si le jeu s'arrête au premier tour ($S_1 \in \{2, 3, 7, 11, 12\}$) ou avant le $n+1^{\text{e}}$ tour, c'est à dire $S_1 = k$ avec $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ et il existe un entier $i \in [\![2, n]\!]$ tel que $S_i \in \{k, 7\}$.

Par conséquent, lorsque $S_1 = k$, $[T \leqslant n] = [S_1 = k] \cap \left(\bigcup_{i=2}^{n} [S_i \in \{k, 7\}]\right)$ ou encore

$$[\overline{T \leqslant n}] = [S_1 = k] \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n} [S_i \notin \{k, 7\}]\right)$$

$$P\Big(\overline{T \leqslant n}\Big) = P\big(S_1 = k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}\big) \prod_{i=2}^{n} \Big(1 - P\big(S_i \in \{k, 7\}\big)\Big) = \frac{2}{9} \times \Big(1 - \frac{9}{36}\Big)^{n-1} = \frac{2}{9} \times \left(\frac{27}{36}\right)^{n-1}$$

$$\boxed{P\Big(\overline{T \leqslant n}\Big) \leqslant \left(\frac{27}{36}\right)^{n}}$$

(c) $P\Big(\overline{T \leqslant n}\Big)$ est la probabilité que la partie ne soit toujours pas terminée après n lancers ; cette probabilité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini donc une partie a une probabilité égale à 1 de ne pas durer indéfiniment.

(d) i. On gagne au premier lancer si $S_1 = 7$ ou 11, donc $\alpha_1 = P(G_1) = \frac{2}{9}$; de même on perd au premier lancer si $S_1 = 2, 3$ ou 12, donc $\beta_1 = \frac{1+2+1}{36}$.

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{2}{9}\ ;\ \beta_1 = \frac{1}{9}}$$

ii. On a vu aux questions 2b et 2c que $P_{[S_1=k]}(G_n) = \frac{k-1}{36} \times \left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2}$ si $4 \leqslant k \leqslant 6$ et que $P_{[S_1=k]}(G_n) = \frac{13-k}{36} \times \left(\frac{17+k}{36}\right)^{n-2}$ si $8 \leqslant k \leqslant 10$.

On en déduit $\alpha_n = \sum_{k=2}^{12} P(S_1 = k) \times P_{[S_1=k]}(G_n)$ et comme $P_{[S_1=k]}(G_n) = 0$ pour $k \in \{2, 3, 7, 11, 12\}$,

il vient
$$\alpha_n = \sum_{k=4}^{6} P(S_1 = k) \times P_{[S_1=k]}(G_n) + \sum_{k=8}^{10} P(S_1 = k) \times P_{[S_1=k]}(G_n)$$
$$= \sum_{k=4}^{6} \left(\frac{k-1}{36}\right)^2 \left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2} + \sum_{k=8}^{10} \left(\frac{13-k}{36}\right)^2 \left(\frac{17+k}{36}\right)^{n-2} = 2\times\sum_{k=4}^{6} \left(\frac{k-1}{36}\right)^2 \left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2}$$

iii. Perdre au n^{e} coup sachant $[S_1 = k]$ signifie obtenir une somme égale à 7 au n^{e} lancer (au lieu de k lorsqu'on gagne) donc en notant H_n l'événement «Perdre au n^{e} lancer », on a :
$P_{[S_1=k]}(H_n) = \dfrac{6}{36}\left(\dfrac{31-k}{36}\right)^{n-2}$ si $k \in \{4,5,6\}$ et $P_{[S_1=k]}(H_n) = \dfrac{6}{36}\left(\dfrac{17+k}{36}\right)^{n-2}$ si $k \in \{8,9,10\}$.
De même que précédemment, $P_{[S_1=k]}(H_n) = 0$ pour $k \in \{2,3,7,11,12\}$, donc
$$\beta_n = \sum_{k=4}^{6} P(S_1=k)\times P_{[S_1=k]}(H_n) + \sum_{k=8}^{10} P(S_1=k)\times P_{[S_1=k]}(H_n) = 2\times\frac{6}{36}\sum_{k=4}^{6}\left(\frac{k-1}{36}\right)\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2}$$

$$\boxed{\alpha_n = \frac{2}{36^n}\sum_{k=4}^{6}(k-1)^2(31-k)^{n-2} \quad ; \quad \beta_n = \frac{12}{36^n}\sum_{k=4}^{6}(k-1)(31-k)^{n-2}}$$

iv. L'événement $[T=n]$ est réalisé si et seulement si $G_n \cup H_n$ l'est, donc $P(T=n) = \alpha_n + \beta_n$.

Ainsi, sous réserve de convergence de la série, $E(T) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(\alpha_n+\beta_n)$

$$\begin{aligned}
E(T) &= (\alpha_1+\beta_1) + \frac{2}{36^2}\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\sum_{k=4}^{6}(k-1)\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2}(k-1+6)\right)\\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{36^2}\sum_{k=4}^{6}(k-1)(k+5)\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{36^2}\sum_{k=4}^{6}(k-1)(k+5)\left(\frac{36}{31-k}\right)^2\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n}\\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{36^2}\sum_{k=4}^{6}(k-1)(k+5)\left(\frac{36}{31-k}\right)^2\left(\frac{\frac{31-k}{36}}{(1-\frac{31-k}{36})^2} - \frac{31-k}{36}\right)\\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{36^2}\sum_{k=4}^{6}(k-1)(k+5)\left(\frac{36}{31-k}\right)\left(\frac{1}{(\frac{5+k}{36})^2} - 1\right) = \frac{1}{3} + 2\times 36\sum_{k=4}^{6}\frac{(k-1)\left(1-(\frac{k+5}{36})^2\right)}{(k+5)(31-k)}\\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{36}\sum_{k=4}^{6}\frac{(k-1)(41+k)}{k+5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}\left(\frac{3\times 45}{9} + \frac{4\times 46}{10} + \frac{5\times 47}{11}\right) = \frac{557}{165}
\end{aligned}$$

4. N_1 représente le nombre de parties gagnantes, N_2 le nombre de parties perdantes ; N_1 est approximativement égal à la probabilité de gagner le jeu, multiplié par le nombre de simulations (environ 493), N_2 est approximativement égal à la probabilité de perdre le jeu, multiplié par le nombre de simulations (soit à peu près 507). Quant à «duree», c'est la durée moyenne d'une partie, gagnante ou perdante (3,38 environ).

Remarques La probabilité de gagner peut se retrouver en calculant $\sum \alpha_n$, on peut vérifier en calculant $\sum(\alpha_n+\beta_n)$ qu'on obtient bien 1, donc que la probabilité de continuer indéfiniment est nulle ; enfin on peut vérifier expérimentalement les valeurs calculées en faisant "tourner" le programme de simulation.