2 BCPST 1 & 2 Samedi 30 novembre 2013

MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°3
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME N°1

1. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]-1;1]$.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

(b) En déduire l'égalité : $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$.

(c) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ converge et que sa somme vaut $\ln(1+x)$.

2. Déduire de la question **1.** les égalités suivantes :

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad\qquad \ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$$

3. Soit (u_n) une suite décroissante de nombre réels qui converge vers 0.
Pour tout $n \geq 1$, on désigne par S_n la somme partielle de rang n de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} u_k$.

(a) Démontrer que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

(b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} u_k$ est convergente et que sa somme S vérifie l'encadrement :

$$\forall n \geq 1, S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}$$

(c) En déduire : $\forall n \geq 1, |S_n - S| \leq u_n$.

(d) Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un entier naturel N_p tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} près pour tout entier naturel $n \geq N_p$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. On se propose maintenant de calculer une valeur de $\ln(2)$ à 10^{-p} près en utilisant les sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}\right)_{n\geq 1}$. On introduit pour cela, pour tout $n \geq 1$, le reste de rang n de la série : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.

(a) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a l'encadrement : $0 \leq R_n \leq \frac{1}{2^n}$.

(b) Déterminer un entier naturel $N_p^{'}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} près, pour tout entier naturel $n \geq N_p^{'}$.

(c) Comparer les deux entiers N_p et $N_{p'}$.

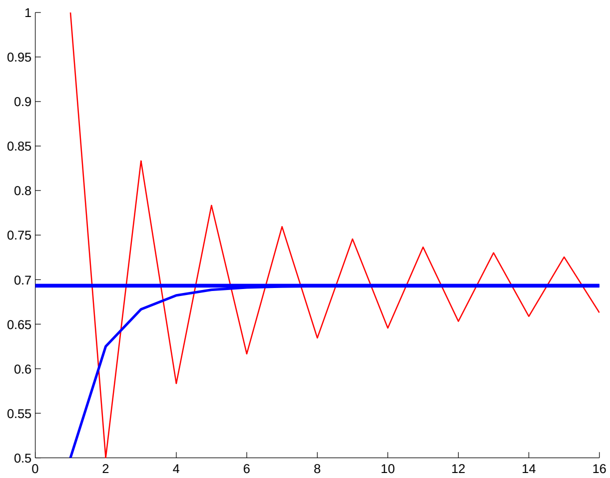
5. Question Informatique en relation avec les deux questions précédentes

Vous trouverez ci-dessous le script incomplet de la fonction `QUESTION_INFO`. Complétez-le de manière à obtenir, lors de l'exécution de l'instruction `[S1,S2]=QUESTION_INFO(16)`, les résultats ci-dessous.

▷ D'une part :

```
S1 =
     0.66287185037185
S2 =
     0.69314632826500
```

▷ D'autre part, la sortie graphique suivante :



Le listing à compléter :

```
function [S1,S2]=QUESTION_INFO(n)
Y1=[];Y2=[];S1=0;S2=0;X=1:n;
for k=1:n
      ..................
      ..................
      ..................
      ..................
end
hold on
plot(X,Y1,'red','LineWidth',1);
plot(X,Y2,'blue','LineWidth',2);
plot([0,n],[S2,S2],'blue','LineWidth',3);
```

PROBLÈME N°2

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne « FACE » avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou « PILE » avec la probabilité $q = 1 - p$.
L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux « FACE » de suite, c'est-à-dire lors de deux lancers consécutifs.
On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P, modélisant cette expérience.

- Pour tout entier $n \geq 1$, on note :
  U_n l'événement : « *On obtient deux « FACE » de suite, pour la première fois aux lancers numéro n et $n+1$* », et l'on pose $u_n = P(U_n)$.
- Pour tout entier $n \geq 2$, on note :
  ▷ A_n l'événement : « *Les n premiers lancers ne donnent pas deux « FACE » de suite et le $n^{\text{ième}}$ lancer donne « FACE »* ».
  ▷ B_n l'événement : « *Les n premiers lancers ne donnent pas deux « FACE » de suite et le $n^{\text{ième}}$ lancer donne « PILE »* ».
  On pose alors : $x_n = \mathrm{P}(A_n)$ et $y_n = \mathrm{P}(B_n)$.

1. (a) Déterminer u_1 ; x_2, y_2, u_2 ; x_3, y_3, u_3.
(b) Trouver, pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n.
(c) Pour tout $n \geq 2$, déterminer les probabilités conditionnelles :

$$\mathrm{P}\left(A_{n+1} / A_n\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}\left(A_{n+1} / B_n\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}\left(B_{n+1} / A_n\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}\left(B_{n+1} / B_n\right)$$

(d) En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & p\, y_n \\ y_{n+1} & = & q\,(x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que $p = q = \frac{1}{2}$.
(a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres entiers définie par les conditions :

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1 \quad \text{et} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ pour tout entier naturel } n$$

Montrer que, pour tout entier n au moins égal à 2, on a : $2^n y_n = f_n$
(b) On pose $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$.
(c) En déduire, pour tout entier n au moins égal à 2, une expression de x_n, puis de u_n, en fonction de n, α et β.
(d) Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir deux « FACE » de suite au bout d'un nombre fini de lancers est égale à 1.
(e) Déterminer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \times u_n$.

3. On considère dans cette question le cas où $p = \frac{2}{3}$.
(a) Donner, pour tout entier n au moins égal à 1, une expression de u_n en fonction de n.
(b) Déterminer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \times u_n$.

4. Retour au cas général.

(a) Justifier pour tout entier naturel non nul n les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} u_{n+2} - q\,u_{n+1} - pq\,u_n &= 0 \\ (n+2)\,u_{n+2} - q\,(n+1)\,u_{n+1} - pq\,n u_n &= 2u_{n+2} - q\,u_{n+1} \end{aligned}$$

(b) Montrer, sans chercher à les expliciter, que l'équation $r^2 - qr - pq = 0$ admet exactement deux racines r_1 et r_2 strictement comprises entre -1 et $+1$.

(c) En déduire que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} n \times u_n$ sont convergentes.

(d) À l'aide de 4a et 4c et sans expliciter u_n, déterminer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \times u_n$.
Que représentent ces deux sommes ?

5. Écrire en quelques lignes une fonction (langage MATLAB ou SCILAB) dont l'argument d'entrée est $p \in]0,1[$ et dont l'argument de sortie aléatoire est N tel que : « Deux « FACE » de suite sont obtenus pour la première fois aux lancers numéro N et $N+1$ ».
Indication : pour simuler le lancer de pièce, vous utiliserez l'instruction R=rand qui affecte à R un réel choisi au hasard dans l'intervalle $]0,1[$.