Corrigé du devoir surveillé n^{o}3

Problème 1

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}$ (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$).
Cette formule est valable pour tout $x \neq -1$, donc en particulier pour $x \in]-1,1]$, donc
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$ d'où la formule annoncée.

(b) $\forall x \in]-1,1]$ les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$, $t \mapsto \dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}$ et $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$ sont continues sur $[0,x]$ donc :
$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x (-1)^k t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$, soit $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$, puis par changement d'indice ($j = k-1$)

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

(c) Soit $x \in]-1,1]$; si $x \in [0,1]$ alors $\forall t \in [0,x]$, $\left|\dfrac{t^n}{1+t}\right| = \dfrac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$ donc $\displaystyle\int_0^x \left|\frac{t^n}{1+t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$
et si $x \in]-1,0[$ alors $\forall t \in [x,0]$, $\left|\dfrac{t^n}{1+t}\right| \leqslant \dfrac{|t|^n}{1+x}$ donc $\displaystyle\int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{-1}{1+x}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$
Dans les deux cas, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \ln(1+x)$

2. Il suffit d'appliquer la formule établie à la question précédente à $x = 1$ et $x = -\frac{1}{2}$:
$\displaystyle\ln 2 = \ln(1+1) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\times 1^k$ et $\displaystyle -\ln 2 = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k\,2^k}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$; $\displaystyle S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k-1}u_k - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}u_k = (-1)^{2n+1}u_{2n+2} + (-1)^{2n}u_{2n+1}$
$= -u_{2n+2} + u_{2n+1} \geqslant 0$ car $u_{2n+1} \geqslant u_{2n+2}$ $\boxed{(S_{2n}) \text{ est croissante}}$
$\displaystyle S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3}(-1)^{k-1}u_k - \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}u_k = (-1)^{2n+2}u_{2n+3} + (-1)^{2n+1}u_{2n+2}$
$= u_{2n+3} - u_{2n+1} \leqslant 0$ car $u_{2n+3} \leqslant u_{2n+2}$ $\boxed{(S_{2n+1}) \text{ est décroissante}}$

D'autre part $S_{2n+2} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+1}u_{2n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.

(b) (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes donc convergent vers un même réel S ; par conséquent la suite (S_n) converge vers S. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k = S \in \mathbb{R}$; la suite des sommes partielles de la série converge, donc la série est convergente, de somme S.
(S_{2n}) est croissante donc converge vers la borne supérieure de l'ensemble de ses termes : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} \leqslant S$.
(S_{2n+1}) est décroissante donc converge vers la borne inférieure de l'ensemble de ses termes : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n-1} \geqslant S$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant S_{2n+1} - S \leqslant S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$ donc $|S_{2n+1} - S| \leqslant u_{2n+1}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \geqslant S_{2n} - S \geqslant S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ donc $|S_{2n} - S| \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n}$
Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n - S| \leqslant u_n$

(d) La suite de terme général $\dfrac{1}{k}$ décroît vers 0 ; on peut donc appliquer le résultat de la question précédente à la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ dont la somme vaut $\ln 2$: $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n}$

On en déduit que $\displaystyle\frac{1}{n} \leqslant 10^{-p} \Longrightarrow \left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leqslant 10^{-p}$, donc $\boxed{N_p = 10^p}$ convient.

$$\boxed{(n \geqslant 10^p) \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ est une valeur approchée à } 10^{-p} \text{ près de } \ln 2\right)}$$

4. (a) R_n est positif car c'est une somme de termes positifs ; d'autre part, $\forall k \geqslant n+1$, $\dfrac{1}{k\,2^k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ donc

$$R_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-n-1}} \underset{(j=k-n-1)}{=} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n}$$

(b) $\displaystyle\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,2^k} = R_n$, donc $\displaystyle\big(R_n \leqslant 10^{-p}\big) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,2^k}$ est une valeur approchée à 10^{-p} de $\ln 2$.

Comme $R_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, il suffit de prendre N'_p tel que $\dfrac{1}{2^{N'_p}} \leqslant 10^{-p}$ c'est à dire $\boxed{N'_p \geqslant \dfrac{p \ln 10}{\ln 2}}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \geqslant n$ donc $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$; par conséquent $\dfrac{1}{2^{N_p}} \leqslant \dfrac{1}{N_p} \leqslant 10^{-p}$, donc $N_p \geqslant N'_p$.

Remarque : En fait lorsque p tend vers $+\infty$ (c'est à dire si on fait tendre la précision de l'approximation vers 0) $\displaystyle\frac{1}{2^n} \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc N_p et N'_p tendent vers l'infini mais $N'_p = o(N_p)$.

Par exemple, pour $n = 2$ on obtient $N_2 = 100$, $N'_2 = 7$ et pour $n = 10$ on a $N_{10} = 10^{10}$, $N'_{10} = 34$.

La convergence est considérablement plus rapide avec la deuxième série.

5.

```
function [S1,S2]=QUESTION_INFO(n)
    Y1=[]; Y2=[];S1=0;S2=0;X=1:n;
    for k=1:n do
        S1=S1+(-1)^(k-1)/k
        Y1=[Y1 ,S1]
        S2=S2+1/(k*2^k)
        Y2=[Y2 ,S2]
    end
  plot(X,Y1,'red','Linewidth',1)
  plot([0,n],[S2,S2],'green','Linewidth',3)
  plot(X,Y2,'blue','Linewidth',2)
endfunction
```

Problème 2

1. (a) $U_1 = F_1 \cap F_2$, $\quad A_2 = P_1 \cap F_2$, $\quad B_2 = P_2$, $\quad U_2 = P_1 \cap F_2 \cap F_3$
$A_3 = P_2 \cap F_3$ (le premier résultat est indifférent puisque le deuxième lancer doit donner pile)
$B_3 = \overline{U}_1 \cap P_3 = \big(A_2 \cup B_2\big) \cap P_3 = (A_2 \cap P_3) \cup (B_2 \cap P_3)$, $\quad U_3 = P_2 \cap F_3 \cap F_4$;
les lancers étant indépendants on en déduit :

$$\boxed{u_1 = p^2, \quad x_2 = q\,p, \quad y_2 = q, \quad u_2 = q\,p^2, \quad x_3 = q\,p, \quad y_3 = x_2\,q + y_2\,q = q^2(1+p), \quad u_3 = q\,p^2}$$

(b) U_n est réalisé si et seulement si les lancers n et $n+1$ donnent «FACE», et si c'est la première fois qu'on a deux «FACE» consécutifs ; donc après le n^{e} lancer, on n'a jamais eu deux «FACE» consécutifs, et comme le n^{e} lancer donne «FACE», A_n est réalisé ; ainsi $U_n \subset A_n$.
Si A_n est réalisé, il suffit d'obtenir «FACE» au $n+1^{\text{e}}$ lancer pour réaliser U_n, on en déduit $U_n = A_n \cap F_{n+1}$ d'où

$$\boxed{u_n = p\,x_n}$$

(c) $\boxed{P(A_{n+1}/A_n) = 0}$ car si on réalise A_{n+1}, alors on obtient «FACE» au $n+1^{\text{e}}$ lancer et «PILE» au n^{e}, donc A_n n'est pas réalisé (en d'autres termes $A_n \cap A_{n+1} = \varnothing$).
$A_n \cup B_n$ est l'événement : « Les n premiers lancers ne donnent pas deux «FACE» de suite », donc si B_n est réalisé, il suffit d'obtenir «FACE» au lancer suivant pour réaliser A_{n+1}, d'où $\boxed{P(A_{n+1}/B_n) = p}$
Réaliser B_{n+1} implique d'obtenir «PILE» au $n+1^{\text{e}}$ lancer ; or si on n'a pas eu deux «FACE» de suite au cours des n premiers lancers, ce sera encore le cas après le lancer $n+1$ s'il donne «PILE».
On en déduit $\boxed{P(B_{n+1}/B_n) = P(A_{n+1}/A_n) = q}$

(d) $(A_n \cap B_n) = \varnothing$, $(A_n \cup B_n) = \overline{U}_{n-1}$, et A_{n+1} et B_{n+1} sont inclus dans $A_n \cup B_n$, donc :
$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap A_n) = P(B_n) \times P(A_{n+1}/B_n) + 0$ soit $\boxed{x_{n+1} = p\,y_n}$
$P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap B_n) + P(B_{n+1} \cap A_n) = P(B_n) \times P(B_{n+1}/B_n) + P(A_n) \times P(B_{n+1}/A_n)$ soit $\boxed{y_{n+1} = q\,y_n + q\,x_n}$

2. (a) On montre ce résultat par récurrence à deux termes sur n à partir de la valeur 2 :
$\star$ on vérifie que $2^2\,y_2 = f_2$: $\;y_2 = \frac{1}{2}$ et $f_2 = f_1 + f_0 = 2$, et que $2^3\,y_3 = f_3$: $\;y_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ et $f_3 = f_2 + f_1 = 3$
$\star$ soit $n \geqslant 2$, on suppose que $2^n\,y_n = f_n$ et $2^{n+1}\,y_{n+1} = f_{n+1}$; d'après les relations établies à la question précédente $y_{n+2} = \dfrac{1}{2}\,x_{n+1} + \dfrac{1}{2}\,y_{n+1} = \dfrac{1}{4}\,y_n + \dfrac{1}{2}\,y_{n+1}$ donc
$$f_{n+2} = 2^{n+2}\,y_{n+2} = \frac{2^{n+2}}{4}\,y_n + \frac{2^{n+2}}{2}\,y_{n+1} = 2^n\,y_n + 2^{n+1}\,y_{n+1} = f_n + f_{n+1}$$

(b) $\dfrac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1 = f_0$ et $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1 = f_1$, donc la formule est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
Soit $n \geqslant 0$, on suppose que $\dfrac{\alpha^{n+} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = f_n$ et $\dfrac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = f_{n+1}$
Remarquons que α et β sont solution de l'équation $x^2 = x + 1$, donc $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$, d'où :
$(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) + (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) = \alpha^{n+1}\,(\alpha + 1) - \beta^{n+1}\,(\beta + 1) = \alpha^{n+3} - \beta^{n+3}$; par conséquent :
$$\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}}{\alpha - \beta}, \text{ d'où } f_{n+1} + f_n = \frac{\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}}{\alpha - \beta} = f_{n+2}$$

(c) Pour tout $n \geqslant 2$, $y_n = \dfrac{f_n}{2^n} = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{2^n(\alpha - \beta)}$, donc $x_{n+1} = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{2^{n+1}(\alpha - \beta)}$.
Ceci donne l'expression de x_n pour tout $n \geqslant 3$; on vérifie qu'elle reste vraie pour $n = 2$, ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ x_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2^n(\alpha - \beta)} \text{ et } u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2^{n+1}(\alpha - \beta)}}$$

(d) $u_1 = \dfrac{1}{4} = \dfrac{\alpha - \beta}{2^2(\alpha - \beta)}$, donc la formule obtenue pour u_n est valable pour tout $n \geqslant 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n - \left(\frac{\beta}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\left[\frac{\alpha}{2}\times\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \frac{\beta}{2}\times\left(\frac{1}{1-\frac{\beta}{2}}\right)\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\left(\frac{\alpha}{2-\alpha} - \frac{\beta}{2-\beta}\right) = \frac{2(\alpha-\beta)}{2(\alpha-\beta)(2-\alpha)(2-\beta)} = 1.$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n - n\left(\frac{\beta}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\left[\frac{\alpha}{2}\times\left(\frac{1}{(1-\frac{\alpha}{2})^2}\right) - \frac{\beta}{2}\times\left(\frac{1}{(1-\frac{\beta}{2})^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{(2-\alpha)^2} - \frac{\beta}{(2-\beta)^2}\right) = 4 - \alpha\,\beta = 5$$

3. (a) Comme dans le cas précédent, on a pour tout $n \geqslant 2$, $x_{n+1} = \dfrac{2}{3}\,y_n$ et $y_{n+1} = \dfrac{1}{3}(x_n + y_n)$, donc $\forall n \geqslant 2,\ x_{n+2} = \dfrac{1}{3}\,x_{n+1} + \dfrac{2}{9}\,x_n$ puis en multipliant par q, $\forall n \geqslant 2,\ u_{n+2} = \dfrac{1}{3}\,u_{n+1} + \dfrac{2}{9}\,u_n$.

On constate que cette relation reste valable pour $n = 1$; on résout l'équation caractéristique associée : $x^2 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{9} = 0$ qui a pour solutions $\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{1}{3}$.

Il existe donc deux constantes réelles a et b telles que $\forall n \geqslant 1,\ u_n = a\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + b\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$. On calcule a et b en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{2\,a}{3} - \dfrac{b}{3} & = & u_1 = \dfrac{4}{9} \\ \dfrac{4\,a}{9} + \dfrac{b}{9} & = & u_2 = \dfrac{4}{27} \end{array}\right. \quad \text{on obtient } a = \frac{4}{9} \text{ et } b = -\frac{4}{9} \text{ donc}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{4}{9}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right) - \left(\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right)\right] = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n = \frac{4}{9}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n - n\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{\frac{2}{3}}{(1-\frac{2}{3})^2}\right) - \left(\frac{-\frac{1}{3}}{(1+\frac{1}{3})^2}\right)\right] = \frac{11}{4}$$

4. (a) En reprenant les relations établies à la question 1d, on a $\forall n \geqslant 2,\ x_{n+2} = p\,y_{n+1} = p\,q\,x_n + q\,x_{n+1}$, et comme $u_n = q\,x_n$, on a aussi $\forall n \geqslant 2,\ u_{n+2} - q\,u_{n+1} - p\,q\,u_n = 0$, relation dont on vérifie qu'elle reste vraie pour $n = 1$ puisque $u_1 = p^2,\ u_2 = u_3 = q\,p^2$

D'autre part, $(n+2)\,u_{n+2} - q\,(n+1)\,u_{n+1} - p\,q\,n\,u_n = n\,\underbrace{\left(u_{n+2} - q\,u_{n+1} - p\,q\,u_n\right)}_{0} + 2\,u_{n+2} - q\,u_{n+1}$

On a donc bien les deux relations annoncées.

(b) L'équation $r^2 - q\,r - p\,q = 0$ a pour discriminant $\Delta = q^2 + 4\,p\,q > 0$ donc l'équation a 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2 $(r_1 < r_2)$; l'expression $f(r) = r^2 - q\,r - p\,q$ est négative sur l'intervalle $[r_1, r_2]$.
Or $f(-1) = 1 + q - p\,q > 0$ car $q > 0$ et $p\,q < 1$ et $f(1) = 1 - q - p\,q = p - p\,q = p^2 > 0$; donc -1 et 1 ne sont pas dans l'intervalle $[r_1, r_2]$ et $-1 < r_1 < r_2 < 1$.

(c) Il existe des constantes réelles a_p et b_p (indépendantes de n mais pas de p) telles que l'on ait : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = a_p\,r_1^n + b_p\,r_2^n$;
Les séries $\sum r_1^n,\ \sum r_2^n,\ \sum n\,r_1^n,\ \sum n\,r_2^n$ sont des séries géométriques et dérivées convergentes, car de raisons r_1 et r_2 appartenant à $]-1, 1[$. Donc $\sum u_n$ et $\sum n\,u_n$ convergent.

(d) $u_{n+2} - q\,u_{n+1} - p\,q\,u_n = u_{n+2} - (1-p)\,u_{n+1} - p\,(1-p)\,u_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) + p\,(u_{n+1} - u_n) + p^2 u_n$.
La relation $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} - q\,u_{n+1} - p\,q\,u_n = 0$ entraine par sommation pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+2} - u_{n+1}) + p\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1} - u_n) + p^2\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 0$; les deux premières sommes sont télescopiques donc :

$$-u_2 - p\,u_1 + p^2\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 0, \text{ soit } p^2\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_2 + p\,u_1 = q\,p^2 + p \times p^2 = p^2(p+q) = p^2$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1}$$

Par changement d'indice ($j = n+2$) on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)\,u_{n+2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n\right) - u_1 - 2\,u_2$

De même, en posant $j = n+1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,u_{n+1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n\right) - u_1$, donc en utilisant la deuxième relation de la question 4a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+2)\,u_{n+2} - q\,(n+1)\,u_{n+1} - p\,q\,n\,u_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(2\,u_{n+2} - q\,u_{n+1}\Big)$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n - u_1 - 2\,u_2\right) - q\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n - u_1\right) - q\,p\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n = 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1 - u_2\right) - q\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1\right)$$

$$(1-q-q\,p)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n\right) + (q-1)\,u_1 - 2\,u_2 = (2-q)\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) + (q-2)\,u_1 - 2\,u_2$$

$$(p-q\,p)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n\right) = (2-q)\times 1 - u_1 \text{ donc } \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n = \frac{1+p-p^2}{p^2}}$$

On vérifie sans peine que ce résultat est cohérent avec les valeurs obtenues aux questions précédentes (pour $q = \frac{1}{2}$ puis $q = \frac{2}{3}$).

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ représente la probabilité d'obtenir deux «FACE» de suites au bout d'un temps fini, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n$ représente le temps moyen d'attente pour l'obtention du premier «FACE» de la première série de deux «FACE» consécutifs.

En d'autres termes, en notant X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux «FACE» consécutifs, on a $E(X) - 1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n$ donc $E(X) = \dfrac{1+p}{p^2}$

5.

```
function N=DeuxFace(p)
    fF=%f
    r=rand()
    Jeu=[r]
    face=(r<p)
    N=0
    while not(fF) do
        R=rand()
        face=(r<p)
        Face=(R<p)
        Jeu=[Jeu R]
        fF=face&Face
        r=R
        N=N+1
    end
    disp(Jeu)
endfunction
```