MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°1
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1
Étude d'une équation fonctionnelle

Soit a un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

1. Un premier cas particulier

Pour cette question, nous prenons a égal à 1 et φ désigne la fonction exponentielle.

(a) On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

i. Calculer $f(0)$.

ii. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, f et e^x.

iii. En déduire la fonction f.

(b) Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

2. Un second cas particulier

Pour cette question, nous prenons a égal à -1 et φ désigne encore la fonction exponentielle.

(a) On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

i. Calculer $f(0)$.

ii. Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, F et e^x.

iii. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et e^x. Calculer $f'(0)$.

iv. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f''(x)$ en fonction de x, $f'(x)$ et e^x.

v. Démontrer alors que, pour tout nombre réel x, on a $f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

vi. En déduire la fonction f.

(b) Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

3. Résolution de l'équation homogène

Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ est l'application nulle.

On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) **Calcul des dérivées successives de f**

i. Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.

ii. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.

iii. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

iv. En déduire, pour tout nombre entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

(b) Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) Soit A un nombre réel strictement positif.

i. Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que

$$\forall x \in [-A;A]\,, \qquad |f(x)| \leqslant M$$

et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$\forall x \in [-A;A]\,, \qquad |f^{(n)}(x)| \leqslant M.$$

ii. Soit x un nombre réel appartenant à $[-A; A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$|f(x)| \leqslant M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$$

et en déduire que $f(x) = 0$.

(d) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

4. Étude de l'équation complète

Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1; 1]$ et φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que, sous réserve d'existence, il existe une unique application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

(b) Que peut-on en déduire sur l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

Problème 2

Commençons par énoncer une définition qui fera prochainement l'objet d'un cours approfondi.

<u>DÉFINITION :</u> (Intégrale généralisée convergente)
Si f est une fonction réelle ou complexe, continue sur $[0, +\infty[$ dont l'intégrale sur le segment $[0, A]$ admet une limite finie L lorsque A tend vers $+\infty$, on dit que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est une intégrale généralisée convergente et l'on écrit :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = L = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nous nous proposons de prouver le résultat suivant

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie A
On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f : x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et que ; $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 < f(x) \leq 1$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul et tout réel x strictement positif, on a :

$$\frac{x\,e^{-nx}}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x - 1} - \sum_{k=1}^{n} x\,e^{-kx}$$

3. Soit n un entier naturel non nul quelconque

Déterminer pour tout réel M strictement positif $\displaystyle\int_0^M x\, e^{-nx}\, \mathrm{d}x$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^M x\, e^{-nx}\, \mathrm{d}x$ admet une limite finie lorsque M tend vers $+\infty$. et exprimer cette limite en fonction de n.

4. Soit n un entier naturel n non nul quelconque.

Donner pour tout réel M strictement positif un encadrement de $\displaystyle\int_0^M \frac{x\, e^{-nx}}{e^x - 1}\, \mathrm{d}x$ puis en déduire les deux résultats suivants :

- $\displaystyle\int_0^M \frac{x\, e^{-nx}}{e^x - 1}\, \mathrm{d}x$ admet lorsque M tend vers $+\infty$ une limite finie notée L_n .
- La suite (L_n) tens vers 0.

5. Déduire des questions précédentes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Partie B

Dans cette partie, nous noterons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Prouver l'implication suivante : $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \dfrac{1}{\tan^2 x} < \dfrac{1}{x^2} < 1 + \dfrac{1}{\tan^2 x}$.

2. Soit n un entier naturel non nul quelconque

Considérons la fonction polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} \binom{2n+1}{2\ell+1} X^{n-\ell}$ où $X : x \longmapsto x$

(a) En utilisant la formule de Moivre, prouver :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \frac{\sin\big((2n+1)\, x\big)}{\sin^{2n+1}(x)} = P_n\left(\operatorname{cotan}^2(x)\right)$$

(b) Préciser le degré et les racines du polynôme P_n.

En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n\,(2n-1)}{3}$.

<u>*Indication*</u> : la somme des racines de $P_n = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ vaut $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

3. Donner alors un encadrement de $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{2n+1}{k\pi}\right)^2$, puis de S_n.

En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.