Corrigé du devoir surveillé n^{o}4

Problème 1

Première partie

1. $M-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 3-\lambda\end{pmatrix}$, et soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\big(M-\lambda I\big)\,X=0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda\,x & + & 2\,y & & & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)\,y & & & = & 0 \\ 2\,x & & & + & (3-\lambda)\,z & = & 0\end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1\leftarrow L_3\\ L_2\leftarrow 2\,L_2+(\lambda-1)\,L_1\\ L_3\leftarrow L_1\end{array}$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2\,x & + & (3-\lambda)\,z & = & 0\\ (-\lambda^2+\lambda+2)\,x & & & & & = & 0\\ & & -\lambda\,x & + & 2\,y & = & 0\end{array}\right.$$

$-\lambda^2+\lambda+2=(2-\lambda)\,(1+\lambda)$ donc si $\lambda\notin\{-1;2\}$, la deuxième équation donne $x=0$, et en reportant dans la troisième : $y=0$, puis dans la première : $(3-\lambda)\,z=0$. Donc si $\lambda\notin\{-1;2;3\}$, Ker $\big(M-\lambda I\big)=\{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, λ n'est pas valeur propre de M et rg $(M-\lambda I)=3$.

Si $\lambda=3$, il n'y a pas de condition sur z, les solutions du système sont les triplets $(0,0,z)$, $z\in\mathbb{R}$, donc 3 est valeur propre de M et rg $(M-3\,I)=2$.
Si $\lambda=2$ ou $\lambda=-1$, la deuxième équation est toujours vérifiée, donc le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & & & + & z & = & 0\\ -2\,x & + & 2\,y & & & = & 0\end{array}\right. \text{ pour } \lambda=2 \text{ et } \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & & & + & 4\,z & = & 0\\ x & + & 2\,y & & & = & 0\end{array}\right. \text{ pour } \lambda=-1$$

Dans les deux cas, l'ensemble des solutions du système est une droite vectorielle, donc rg $(M-2\,I)$ = rg $(M+I)=2$.

$$\boxed{\text{rg } (M-\lambda I)=2 \text{ pour } \lambda\in\{-1;2;3\} \text{ et } 3 \text{ sinon.}}$$

2. λ est valeur propre de M si et seulement si rg $(M-\lambda I)<3$ (ou si Ker $(M-\lambda I)\neq\{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$), donc λ est valeur propre de M si et seulement si $\lambda\in\{-1;2;3\}$

$$\boxed{M \text{ admet 3 valeurs propres : } -1,\ 2 \text{ et } 3.}$$

3. • On détermine Ker $(M+I)$: $\vec{u}=(x,y,z)\in$ Ker $(M+I)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & & & + & 4\,z & = & 0\\ x & + & 2\,y & & & = & 0\end{array}\right.$

Donc $E_{-1}=\{\vec{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x=-2\,y=-2\,z\}$; par exemple $\vec{u}_1=(2,-1,-1)$ vérifie bien $f(\vec{u}_1)=2\,\vec{u}_1$.

• On détermine Ker $(M-2\,I)$: $\vec{u}=(x,y,z)\in$ Ker $(M-2\,I)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & & & + & z & = & 0\\ -2\,x & + & 2\,y & & & = & 0\end{array}\right.$

Donc $E_2=\{\vec{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z=-2\,x=-2\,y\}$; par exemple $\vec{u}_2=(1,1,-2)$ vérifie bien $f(\vec{u}_2)=-\,\vec{u}_2$.

• Ker $(M-3\,I)$ a été calculé précédemment, $E_3=\{\vec{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x=y=0\}$ donc on peut choisir $\vec{u}_3=(0,0,1)$; on a bien $f(\vec{u}_3)=3\,\vec{u}_3$.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \vec{u}_1=(2,-1,-1) & \text{vérifie} & f(\vec{u}_1)=-\,\vec{u}_1\ ;\\ \vec{u}_2=(1,1,-2) & \text{vérifie} & f(\vec{u}_2)=2\,\vec{u}_2\ ;\\ \vec{u}_3=(0,0,1) & \text{vérifie} & f(\vec{u}_3)=3\,\vec{u}_3.\end{array}}$$

4. La famille $\mathcal{B}$ est de cardinal 3, qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3\iff\mathcal{B}$ est libre.
On résout $\alpha\,\vec{u}_1+\beta\,\vec{u}_2+\gamma\,\vec{u}_3=\vec{0}$, $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\in\mathbb{R}^3$: on compose par f
$\alpha\,f(\vec{u}_1)+\beta\,f(\vec{u}_2)+\gamma\,f(\vec{u}_3)=f(\vec{0})=\vec{0}$, soit $-\,\alpha\,\vec{u}_1+2\,\beta\,\vec{u}_2+3\,\gamma\,\vec{u}_3=\vec{0}$, on compose à nouveau par f :
$-\,\alpha\,f(\vec{u}_1)+2\,\beta\,f(\vec{u}_2)+3\,\gamma\,f(\vec{u}_3)=f(\vec{0})=\vec{0}$, soit $\alpha\,\vec{u}_1+4\,\beta\,\vec{u}_2+9\,\gamma\,\vec{u}_3=\vec{0}$.
On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} \alpha\,\vec{u}_1 & + & \beta\,\vec{u}_2 & + & \gamma\,\vec{u}_3 & = & \vec{0} & \\ -\,\alpha\,\vec{u}_1 & + & 2\,\beta\,\vec{u}_2 & + & 3\,\gamma\,\vec{u}_3 & = & \vec{0} & \qquad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \alpha\,\vec{u}_1 & + & 4\,\beta\,\vec{u}_2 & + & 9\,\gamma\,\vec{u}_3 & = & \vec{0} & \qquad L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}\right. \qquad \text{qui équivaut à}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} \alpha\,\vec{u}_1 & + & \beta\,\vec{u}_2 & + & \gamma\,\vec{u}_3 & = & \vec{0} & \\ & & 3\,\beta\,\vec{u}_2 & + & 4\,\gamma\,\vec{u}_3 & = & \vec{0} & \\ & & 5\,\beta\,\vec{u}_2 & + & 10\,\gamma\,\vec{u}_3 & = & \vec{0} & \quad L_3 \leftarrow 5\,L_2 - 3\,L_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha\,\vec{u}_1 & + & \beta\,\vec{u}_2 & + & \gamma\,\vec{u}_3 & = & \vec{0} \\ & & 3\,\beta\,\vec{u}_2 & + & 4\,\gamma\,\vec{u}_3 & = & \vec{0} \\ & & & & 5\,\gamma\,\vec{u}_3 & = & \vec{0} \end{array}\right.$$

L'unique solution du système est le triplet $(0, 0, 0)$, donc la famille $\mathcal{B}$ est libre ; c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est par conséquent $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

6. $A = \dfrac{1}{3}\,M$ et $M = P\times\Delta\times P^{-1}$. Donc $A^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n M^n$, $M^n = P\times\Delta^n\times P^{-1}$ et enfin $A^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n P\times\Delta^n\times P^{-1}$

   $P\times\Delta^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n & 2^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & 2^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & -2^{n+1} & 3^n \end{pmatrix}$, puis $P\times\Delta^n\times P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n+1} + (-1)^n & 0 \\ 3^{n+1} - 2^n - (-1)^n & 3^{n+1} - 2^{n+2} + (-1)^n & 3^{n+1} \end{pmatrix}$

   donc $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & 0 \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & 0 \\ 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & 1 \end{pmatrix}$

Seconde partie

1. Le premier tirage a lieu dans l'urne noire, qui contient 2 boules blanches et une boule noire ; donc la probabilité d'obtenir une boule verte est nulle, celle d'obtenir une boule noire est égale à $\frac{1}{3}$, et celle d'obtenir une boule blanche vaut $\frac{2}{3}$.

   $$\boxed{X_1 = {}^t\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}}$$

   $\forall n \geqslant 1,\ B_n, N_n, V_n$ forment un système complet d'événements ; donc par la formule des probabilités totales :
   $P(B_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(N_n) \times P_{N_n}(B_{n+1}) + P(V_n) \times P_{V_n}(B_{n+1})$
   $P(N_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(N_{n+1}) + P(N_n) \times P_{N_n}(N_{n+1}) + P(V_n) \times P_{V_n}(N_{n+1})$
   $P(V_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(V_{n+1}) + P(N_n) \times P_{N_n}(V_{n+1}) + P(V_n) \times P_{V_n}(V_{n+1})$

   Les probabilités d'obtenir une boule blanche, noire ou verte sachant qu'on est dans l'urne noire sont les probablités calculées pour X_1, puisque la composition des urnes ne change pas et que le premier tirage a lieu dans l'urne noire.

   $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0$, car il n'y a aucune boule blanche dans l'urne blanche, de même $P_{V_n}(B_{n+1}) = P_{V_n}(N_{n+1}) = 0$.
   $P_{B_n}(N_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ car il y a 1 boule noire sur 3 boules au total dans l'urne blanche.

   Enfin $P_{B_n}(V_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ et $P_{V_n}(V_{n+1}) = 1$ car il y a 2 boules vertes sur 3 boules au total dans l'urne blanche et uniquement des boules vertes dans l'urne verte.

   On remarque que les probabilités conditionnelles ainsi calculées sont égales aux cœfficients de la matrice A et que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_{n+1} = AX_n$.

2. On montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = A^{n-1}X_1$: c'est évident pour $n = 1$ puisque $A^0 = I$, ainsi que pour $n = 2$ car il suffit d'appliquer la formule de récurrence prouvée à la question précédente pour $n = 1$.
   Soit $n \geqslant 1$, supposons que $X_n = A^{n-1}X_1$; comme $X_{n+1} = A\,X_n$, on obtient d'après l'hypothèse de récurrence, $X_{n+1} = A \times A^{n-1}\,X_1 = A^n\,X_1$ donc la formule est démontrée pour tout entier naturel non nul.
   D'après la formule établie dans la première partie, on obtient :

$$\begin{cases} P(B_n) = & \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right] \times \frac{2}{3} + \left[\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right] \times \frac{1}{3} + 0 \\ P(N_n) = & \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right] \times \frac{2}{3} + \left[\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right] \times \frac{1}{3} + 0 \\ P(V_n) = & \left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right] \times \frac{2}{3} + \left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right] \times \frac{1}{3} + 0 \end{cases}$$

$$\boxed{P(B_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n, P(N_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n, P(V_n) = 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(N_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(V_n) = 1$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(B_n) + P(N_n) + P(V_n) = 1$

3. Dès qu'on obtient une première boule verte, on n'obtient plus que des boules vertes ensuite, car on tire la boule suivante dans l'urne verte qui ne contient que des boules vertes, et ainsi de suite. Ainsi $[T = n]$ est réalisé si et seulement si l'événement $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 \cap \cdots \cap \overline{V}_{n-1} \cap V_n$ est réalisé.

   Or $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\overline{V}_{k+1} \subset \overline{V}_k$, donc $[T = n] = \overline{V}_{n-1} \cap V_n$ et $P(T = n) = P(V_n) - P(V_{n-1}) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$

   De plus $[T = 0] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n$, donc $P(T = 0) = \lim\limits_{n\to\infty} P(V_n) - P(V_{n-1}) = 0$

   Sous réserve de convergence absolue de la série, $E(T) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n\, P(T = n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left[\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right]$.

   On reconnait une somme deux dérivées de séries géométriques de raisons respectives $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$, donc absolument convergentes ; par conséquent $E(T)$ existe et vaut $\frac{2}{3}\,\frac{2/3}{(1-2/3)^2} + \frac{4}{3}\,\frac{-1/3}{(1+1/3)^2} = \frac{15}{4}$

   De même, T admet un moment d'ordre 2 et $E(T^2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 P(T = n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \left[\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right]$, donc $E(T^2) = \frac{2}{3}\,\frac{(2/3)\times(5/3)}{(1-2/3)^3} + \frac{4}{3}\,\frac{(-1/3)\times(2/3)}{(1+1/3)^3} = \frac{159}{8}$

   Finalement $V(T) = \frac{159}{8} - \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{93}{16}$ $\quad\boxed{E(T) = \frac{15}{4},\ V(T) = \frac{93}{16}}$

Problème 2

Première partie

1. (a) Si X est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, alors $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X = k)\, t^k$, φ_X est un polynôme de degré n.

   Comme X est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, $\varphi_X(1) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$ $\quad\boxed{\varphi_X(1) = 1}$

   (b) g_X est un polynôme à cœfficients réels, donc si φ_X est donnée, par unicité des cœfficients d'un polynôme, les $P(X = k)$ sont déterminés de façon unique. Donc la loi de X est entièrement connue.
   – On utilise la formule de Taylor Mac-Laurin pour un polynôme de degré inférieur ou égal à n :
   $\varphi_X(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{k!}\, X^k$, par conséquent

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{k!}}$$

- $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X = k)$ et $\varphi'_X(t) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X = k)\, t^{k-1}$, donc $\varphi'_X(1) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X = k) = E(X)$
- De même, on a $E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)P(X = k)$ et $\varphi''_X(t) = \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\,P(X = k)\,t^{k-1}$. Ainsi, $\varphi''_X(1) = \sum_{k=0}^{n} k^2\, P(X = k) - \sum_{k=0}^{n} k\, P(X = k) = E(X^2) - E(X)$, et $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \varphi''_X(1) + \varphi'_X(1) - \big(\varphi'_X(1)\big)^2$

(c) - Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (p\,t + q)^n$ *(avec $q = 1 - p$).*
- On constate que $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X(t) = (\alpha + \beta\, t)^n$, avec $\alpha = q$ et $\beta = p$.
- Des les expressions établies à la question 1b, on déduit $\varphi'_X(t) = n\,p\,(p\,t + q)^{n-1}$ et $\varphi''_X(t) = n\,(n-1)p^2\,(p\,t + q)^{n-2}$, donc $E(X) = \varphi'_X(1) = n\,p\,(p + q)^{n-1} = n\,p$ et $V(X) = \varphi''_X(1) + \varphi'_X(1) - \big(\varphi'_X(1)\big)^2 = n\,(n-1)p^2 + n\,p - n^2\,p^2 = n\,p\,q$.

$$\boxed{E(X) = n\,p \text{ et } V(X) = n\,p\,q}$$

2. $\forall t \in \mathbb{R},\ E(t^{X+Y}) = E(t^X\, t^Y) = E(t^X)E(t^Y)$ car les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, t^X et t^Y le sont aussi ; on a donc bien : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.
3. X et Y suivent des lois binômiales, donc $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X(t) = (p\,t + q)^{n_1}$ et $\varphi_Y(t) = (p\,t + q)^{n_2}$.
   X et Y sont indépendantes donc $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) = (p\,t + q)^{n_1+n_2}$
   φ_{X+Y} est connue, donc la loi de $X + Y$ est entièrement connue aussi ; on reconnaît la fonction génératrice d'une variable distribuée selon une loi binômiale $\mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$.

Deuxième partie

1. $\forall t \in [-1, 1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n t^n| \leqslant a_n$.
   La série de terme général a_n converge, et sa somme vaut 1 ; donc la série $\sum a_n t^n$ converge absolument, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
   La convergence absolue entraîne la convergence, donc la série $\sum a_n t^n$ converge et φ_X est bien définie au moins sur le segment $[-1, 1]$.

$$\boxed{\varphi_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1}$$

2. • $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = q^{n-1}\,p$ et $\varphi_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}\,p\,t^n = t\,p\sum_{n=1}^{+\infty}(q\,t)^{n-1} = \dfrac{t\,p}{1 - q\,t}$.

$$\boxed{\varphi_X(t) = \frac{t\,p}{1 - q\,t}}$$

   • $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^n}{n!}$ et $\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^n\,t^n}{n!} = e^{-\lambda}\,e^{\lambda\,t}$

$$\boxed{\varphi_X(t) = e^{\lambda\,(t-1)}}$$

Troisième partie

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, [Z_n = 0] \Rightarrow [Z_{n+1} = 0]$ car s'il n'y a plus de plantes à la génération n, il ne peut pas y avoir de descendants à la génération suivante. Donc $[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$ et $P(Z_n = 0) \leqslant P(Z_{n+1} = 0)$; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   Cette suite est majorée par 1 (u_n est une probabilité) donc converge, et sa limite ℓ est inférieure ou égale à 1.
2. (a) L'événement $[Z_1 = k]$ étant réalisé, on a $Z_n = \sum_{j=1}^{k} W_{j,n}$ et $P\left(\sum_{j=1}^{k} W_{j,n} = 0\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k} [W_{j,n} = 0]\right)$.

   Les variables $W_{j,n}$ étant indépendantes, on a $P_{[Z_1=k]}(Z_n = 0) = \prod_{j=1}^{k} P(W_{j,n} = 0) = \prod_{j=1}^{k} P(Z_{n-1} = 0) = \Big(P(Z_{n-1} = 0)\Big)^k$.

(b) Soit $n \geqslant 2$, les événements $[Z_1 = k]_{k\in\mathbb{N}}$ forment un système complet, donc en appliquant la formule des probabilités totales, $P(Z_n = 0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k)\, P_{[Z_1=k]}(Z_n = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k)\, \big(P(Z_{n-1} = 0)\big)^k$.

Finalement, $P(Z_n = 0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k)\, u_{n-1}^k = \varphi(u_{n-1})$

3. (a) Chaque graine a une probabilité p de germer, donc le nombre de descendants d'une plante donnée suit une loi binômiale de paramètres N et p. $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(N,p)}$

$\varphi(t) = (p\,t + q)^N$, donc $u_n = (p\,u_{n-1} + q)^N$

(b) Soit $x \in]0,1]$, $g(x) \geqslant 0 \iff (p\,x + 1 - p)^N \geqslant x \iff \ln(p\,x + 1 - p)^N \geqslant \ln x$, car ln est croissante.

$$\iff N\, \ln(p\,x + 1 - p) \geqslant \ln x \iff h(x) \geqslant 0$$

g et h sont simultanément positifs (donc simultanément négatifs), ils ont bien le même signe sur $]0,1]$.

(c) $u_1 = P(Z_1 = 0) = q^N$, donc $h(u_1) = N\, \ln(p\,q^N + 1 - p) - \ln(q^N) = N\, \ln\left(\dfrac{p\,q^N + q}{q}\right) = N\, \ln\left(1 + p\,q^{N-1}\right)$

$$\boxed{h(u_1) = N\, \ln\left(1 + p\,q^{N-1}\right)}$$

On remarque que $h(u_1) > 0$ *(sauf pour le cas limite $p = 0$, on a alors $h(u_1) = 0$).*

(d) h est dérivable sur $]0,1]$, et $\forall x \in]0,1]$, $h'(x) = \dfrac{N\,p}{p\,x + 1 - p} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{(N-1)\,p\,x + p - 1}{(p\,x + 1 - p)\,x}$.

$h'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \dfrac{1-p}{(N-1)\,p} = x_0$, donc h décroît sur $]0, x_0]$ et croît sur $[x_0, 1]$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$ et $h(1) = 0$, donc h est positif sur un intervalle $]0, x_1]$ où $x_1 < \dfrac{1-p}{(N-1)\,p}$ vérifie $(p\,x_1 + q)^N = x_1$, et négatif sur $[x_1, 1]$. D'après la question 3b, il en est de même de g.

$g(x) = \varphi(x) + x$, donc $g(u_{n-1}) = u_n - u_{n-1}$. Si suite (u_n) converge vers ℓ, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(u_n)$, donc ℓ vérifie $g(\ell) = 0$. Ainsi $\ell = x_1$ ou 1. $g(u_1) > 0$ *(car g et h sont de même signe)* donc $u_1 < x_1$.

Par récurrence sur n, on montre que $\forall \in \mathbb{N}^*$, $u_n < x_1$: c'est vrai pour $n = 1$ et si pour n donné $\in \mathbb{N}^*$ on a $u_n < x_1$, alors par croissance de φ, $\varphi(u_n) < \varphi(x_1)$ c'est à dire $u_{n+1} < x_1$. La suite (u_n) est croissante, majorée par x_1 donc elle converge toujours vers x_1, jamais vers 1 *(sauf si $x_1 = 1$, c'est à dire pour $p = 0$).*

4. (a) Soit $0 < \lambda \leqslant 1$: δ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $\delta'(x) = \lambda\, e^{\lambda\,(x-1)} - 1$. Comme $0 < \lambda$, la fonction $x \mapsto e^{\lambda\,(x-1)}$ est croissante et $\forall x \in [0,1]$, $e^{-\lambda} \leqslant e^{\lambda\,(x-1)} < e^0 = 1$; puis $\lambda\, e^{-\lambda} \leqslant e^{\lambda\,(x-1)} < \lambda \leqslant 1$. On en déduit que δ est strictement décroissante sur $[0,1]$. $\delta(1) = 0$, donc $\forall x \in [0,1]$, $\delta(x) \geqslant 0$.

La limite ℓ de la suite (u_n) vérifie encore $\varphi(\ell) = \ell$ c'est à dire $\delta(\ell) = 0$; comme on a montré que (u_n) converge, c'est forcément vers 1.

(b) i. θ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\theta'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$; donc θ est décroissante sur $[1, e]$ et croissante sur $[e, +\infty[$, avec un minimum atteint pour $x = e$: $\theta(e) = 1 - e^{-1}$. De plus, $\theta(1) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \theta(x) = 1$, donc $\forall x \in [1, +\infty[$, $\theta(x) \leqslant 1$

ii. $\delta'(x) = \lambda\, e^{\lambda\,(x-1)} - 1$ et $\delta''(x) = \lambda^2\, e^{\lambda\,(x-1)} > 0$, donc δ' est strictement croissante sur $[0,1]$ et réalise une bijection de $[0,1]$ vers $\delta'\big([0,1]\big)$.

$\delta'(0) = \lambda\, e^{-\lambda} - 1$; l'étude de θ sur $[1, +\infty[$ montre que $\forall \lambda \geqslant 1$, $\ln \lambda < \lambda$ donc $\delta'(0) < 0$.

$\delta'(0) = \lambda - 1 > 0$, donc il existe un unique $\beta \in]0,1[$ tel que $\delta'(\beta) = 0$.

Ainsi δ est décroissante sur $[0, \beta]$ et décroissante sur $[\beta, 1]$.

iii. $\delta(0) = e^{-\lambda} > 0$, $\delta(1) = 0$, donc il existe un unique $\alpha \in]0, \beta[$ tel que δ est positive sur $[0, \alpha[$, négative sur $]\alpha, 1]$, et bien sûr $\delta(\alpha) = 0$.

iv. $u_1 = e^{-\lambda} = \delta(0)$, par croissance de φ, puisque $0 < \alpha$, on a $\varphi(0) < \varphi(\alpha) = \alpha$ donc $u_1 < \alpha$. Par récurrence sur n on montre alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \alpha$ *(même raisonnement que pour la loi binômiale).* La suite (u_n) est croissante, majorée par α ; elle converge vers α, qui est l'unique point fixe de φ sur le segment $[0, \alpha]$.

5. (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $A_n \subset A_N$, donc $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} A_n = A_N$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} B_n = A_N$. Par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient l'égalité des deux ensembles.

(b) $\forall n \in [\![1, N]\!],\ P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = P(A_N)$, donc par passage à la limite, $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P(A_N)$.

(c) L'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0]$ est réalisé si et seulement s'il existe une génération n_0 pour laquelle il n'y a aucun descendant *(et par conséquent les générations suivantes sont éteintes) ;* autrement dit si la population de plantes s'éteint au bout d'un certain temps.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = P\left(\bigcup_{n=1}^{N} (Z_n = 0)\right)$, donc la limite de (u_n) mesure la probabilité d'extinction de la population.

Aux questions 3 et 4.a, la limite de (u_n) vaut toujours 1, donc la population s'éteint presque certainement au bout d'un temps fini. Pour la question 3.b l'extinction n'est pas certaine (car $\alpha < 1$).