Correction du devoir n°5

Exercice 1

Partie I

1. Les produits $M(a)\,M(b)$ et $M(b)\,M(a)$ sont égaux et l'identification des coefficients donne la réponse immédiate.
2. On remarque que $M(0) = I_3$ donc si $a \neq \dfrac{1}{3}$, en prenant $b = \dfrac{a}{3\,a-1}$ on obtient $M(a)\,M(b) = M(b)\,M(a) = M(0) = I_3$ donc $M(a)$ est inversible, d'inverse $M(b)$. D'autre part $M(1/3)$ a tous ses coefficients égaux à $\dfrac{1}{3}$ donc est de rang 1, donc pas inversible.
3. Résoudre $[M(a)]^2 = M(a)$ équivaut à $2\,a - 3\,a^2 = a$ c'est à dire $a = 0$ ou $\dfrac{1}{3}$, par conséquent le seul réel non nul qui convient est $a_0 = \dfrac{1}{3}$.
   On a $M(a_0) \times \Big(M(a_0) - I_3\Big) = 0$, donc si $M(a_0)$ était inversible, on obtiendrait en faisant le produit à gauche par son inverse, $M(a_0) - I_3 = 0$ ce qui est faux bien sûr ; par conséquent $M(a_0)$ n'est pas inversible.
4. (a) On résout $M(a) = P + \alpha\,Q$: $M(a) = (1-\alpha)\,M(a_0) + \alpha\,I$; par identification de coefficients diagonaux on obtient : $1 - 2\,a = \dfrac{1-\alpha}{3} + \alpha$ soit $\boxed{\alpha = 1 - 3\,a}$ et on vérifie que cette valeur convient en identifiant les autres coefficients.

   (b) On a vu précédemment $P^2 = P$ puis on calcule $Q^2 = (I-P)^2 = I^2 - 2\,P + P^2 = I - P = Q$ et $P\,Q = P\,(I-P) = P - P^2 = 0 = Q\,P$.
   $$\boxed{P^2 = P \quad , \quad Q^2 = Q \quad , \quad P\,Q = Q\,P = 0}$$
   On obtient alors, puisque P et Q commutent : $[M(a])^2 = (P + \alpha\,Q)^2 = P + \alpha^2 Q = M(2\,a - 3\,a^2)$

   (c) On peut établir par récurrence la formule $[M(a)]^n = (P + \alpha\,Q)^2 = P + \alpha^n Q$, ou faire un calcul direct par la formule du binôme :
   Elle est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$ d'après la question 4a et pour $n = 2$ d'après le calcul précédent. Supposons la vérifiée pou un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $[M(a)]^{n+1} = M(a)\ [M(a)]^n = (P + \alpha\,Q)\ (P + \alpha^n\,Q) = P^2 + \alpha Q\,P + \alpha^n P\,Q + \alpha^{n+1} Q^2 = P + \alpha^{n+1}\,Q$; d'où l'hérédité.
   $$[M(a)]^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} + \frac{\alpha^n}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\alpha^n+1&1-\alpha^n&1-\alpha^n\\1-\alpha^n&2\alpha^n+1&1-\alpha^n\\1-\alpha^n&1-\alpha^n&2\alpha^n+1\end{pmatrix} \text{ avec } \alpha^n = (1-3\,a)^n.$$

Partie II

1. Le mobile est en A à l'instant 0 donc l'instant d'après il est en B avec une probabilité égale à a, en C avec une probabilité égale à a et en A avec une probabilité égale à $1 - 2\,a$; ainsi
   $$\boxed{a_1 = 1 - 2\,a\,,\ b_1 = c_1 = a}$$
2. (a) À tout instant n pour $n \geqslant 1$, A_n, B_n, C_n constituent un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales : $P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})$
   De même, $P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1})$.
   Comme $P_{A_n}(C_{n+1}) = P_{B_n}(C_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{C_n}(B_{n+1}) = P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = a$ et que $P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) = P_{C_n}(C_{n+1}) = 1 - 2\,a$, on obtient bien la relation demandée pour tout $n \geqslant 1$; quant au calcul de a_1, b_1 et c_1, il établit la relation pour $n = 0$.

   (b) Une récurrence immédiate donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = [M(a)]^n\,U_0$ et ainsi :
   $$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\alpha^n+1&1-\alpha^n&1-\alpha^n\\1-\alpha^n&2\alpha^n+1&1-\alpha^n\\1-\alpha^n&1-\alpha^n&2\alpha^n+1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{a_n = \frac{2\,(1-3\,a)^n+1}{3},\ b_n = c_n = \frac{1-(1-3\,a)^n}{3}}$$
3. (a) $D_n = A_0 \cap \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n$ donc par la formule des probabilités composées :
   $P(D_n) = 1 \times P(\overline{A}_1) \times P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) \times \cdots \times P_{\overline{A}_{n-1}}(A_n)$ avec $P(\overline{A}_1) = 2\,a$, $P_{\overline{A}_k}(\overline{A}_{k+1}) = 1 - a$ pour $k \in [\![1, n-2]\!]$ et $P_{\overline{A}_{n-1}}(A_n) = a$; donc $P(D_n) = 2\,a \times (1-a)^{n-2} \times a$ pour $n \geqslant 2$ et $P(D_1) = P(A_1) = a_1 = 1 - 2\,a$.
   $$\boxed{P(D_1) = 1 - 2\,a \text{ et pour } n \geqslant 2,\ P(D_n) = 2\,a^2\,(1-a)^{n-2}}$$

   (b) $$\sum_{n=1}^{\infty} P(D_n) = 1 - 2\,a + \sum_{n=2}^{\infty} 2\,a^2 (1-a)^{n-2} = 1 - 2\,a + 2\,a^2 \sum_{j=0}^{\infty} (1-a)^j = 1 - 2\,a + \frac{2\,a^2}{1-(1-a)} = 1$$
   $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(D_n)$ est la probabilité de revenir en A au bout d'un temps fini, c'est un événement quasi certain.

Exercice 2

1. Pour démontrer $0 < \sin x < x < \tan x$ on peut utiliser le théorème des accroissements finis : $\sin'(x) = \cos x \in]0,1[$ et $\tan'(x) = 1+\tan^2 x \geqslant 1$ donc $\exists c \in]0,x[$ tel que $\sin x - \sin 0 = (x-0)\cos c$ et $\exists d \in]0,x[$ tel que $\tan x - \tan 0 = (x-0)\left(1+\tan^2 x\right)$.

   On en déduit alors $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\,,\quad 0 < \dfrac{1}{\tan x} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sin x}$ puis en élevant au carré :
   $0 < \dfrac{1}{\tan^2 x} = \text{cotan}^2 x < \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \text{cotan}^2 x$

2. (a) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(e^{ix}\right)^{2n+1} = e^{i(2n+1)x}$ donc $(\cos x + i\sin x)^{2n+1} = \cos((2n+1)x) + i\sin((2n+1)x)$.

   La formule du binôme de Newton donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (i\sin x)^k (\cos x)^{2n+1-k} = \cos((2n+1)x) + i\sin((2n+1)x)$

   On identifie les parties imaginaires des deux membres ; pour celui de gauche elle est obtenue à partir des termes de rang impair d'où : $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (i\sin x)^k (\cos x)^{2n+1-k} = i\sin((2n+1)x)$

   On pose alors $k = 2j+1$ avec $j \in [\![0,n]\!]$ d'où $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j+1} (i\sin x)^{2j+1} (\cos x)^{2n-2j} = i\sin((2n+1)x)$

   De $i^{2j+1} = (-1)^j i$ on déduit $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j+1} (-1)^j (\sin x)^{2j+1} (\cos x)^{2(n-j)} = \sin((2n+1)x)$, puis en divisant les deux membres par $(\sin x)^{2n+1} \neq 0$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j+1} (-1)^j \frac{(\cos x)^{2(n-j)}}{(\sin x)^{2(n-j)}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j+1} (-1)^j \text{cotan}^{2(n-j)} x = \frac{\sin((2n+1)x)}{(\sin x)^{2n+1}}$

   (b) On a ainsi le polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j+1} (-1)^j X^{n-j}$. Il est de degré n, son terme de degré k est égal à $\binom{2n+1}{2k}(-1)^{n-k}$; cherchons à présent ses racines. On pose $y = \text{cotan}^2 x$ et on a : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi/2[\,$, $P_n(y) = 0$ lorsque $\sin\left((2n+1)x\right) = 0$ c'est à dire $(2n+1)x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

   En fait $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ entraîne $0 < k < \dfrac{2n+1}{2}$ mais comme k est entier, $k \in [\![1,n]\!]$.

   La fonction cotan^2 est strictement croissante sur $]0,\pi[$ donc les n valeurs $\text{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ sont distinctes. On obtient donc n racines distinctes de P_n et comme son degré est égal à n il ne peut pas en avoir d'autres.

   Le coefficient dominant de P_n vaut $2n+1$ donc la somme de ses racines est égal à l'opposé de son coefficient de degré $n-1$ c'est à dire $\dbinom{2n+1}{3}$ divisé par $2n+1$ soit $\dfrac{n(2n-1)}{3}$.

3. D'après l'encadrement de la question 1 et le résultat précédent, on peut écrire :
   $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \text{cotan}^2\left(\dfrac{2n+1}{k\pi}\right) < \left(\dfrac{2n+1}{k\pi}\right)^2 < 1 + \text{cotan}^2\left(\dfrac{2n+1}{k\pi}\right)$ puis
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{2n+1}{k\pi}\right) < \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < n + \sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)$
   ainsi $\displaystyle\frac{n(2n-1)}{3} < \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{2n(n+1)}{3}$ et $\displaystyle\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} < S_n < \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$.

4. Finalement les deux termes encadrant S_n convergent vers $\dfrac{\pi^2}{6}$, donc S_n également, ce qui prouve que la série converge et que sa somme est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$.