Devoir maison 3

à rendre pour le lundi 17 octobre

1. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2-1\right) f'(x) = 4\,x\,f(x) \qquad (\mathcal{E})$$

   (a) Démontrer que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   (b) Résolution sur les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$. Déterminer
   - l'ensemble S_1 des solutions sur $]-\infty,-1[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.
   - l'ensemble S_2 des solutions sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.
   - l'ensemble S_3 des solutions sur $]1,+\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

   (c) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

   (d) Considérons alors la fonction $g : x \longmapsto x^4 - 2x^2 + 1$, puis les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\quad f_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\,,\quad f_2(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_3(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } 1 < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (e) Élaborer un programme en Python qui affiche les tracés de ces fonctions f_1, f_2 et f_3 sur $[-5,5]$ dans des couleurs différentes. Faire figurer aussi les tracés (obtenus à la main ou via Python) sur la copie.

   (f) Justifier que la famille $(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$.

2. On pose $E = \mathbb{R}_4[X]$. On considère Φ l'application définie sur E de la façon suivante :

$$\forall P \in E\,,\quad \Phi(P) = \left(X^2-1\right)\,P' - 4X\,P$$

   (a) Démontrer que Φ est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer le noyau de Φ.

   (c) Démontrer que l'espace image de Φ est

$$\mathrm{Im}\,(\Phi) = \left\{P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \;:\; c = 3a + 3e\right\}$$

   (d) Justifier que l'équation différentielle $\left(x^2-1\right)\,y' - 4\,x\,y = 3x^2 + x + 1$ admet une unique solution polynomiale de degré inférieur ou égal à trois. *On répondra à cette question sans résoudre l'équation différentielle mais en utilisant les informations sur Im(Φ) et Ker(Φ).*

   (e) On note $Q = 3X^2 + X + 1$ et P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Phi(P) = Q$. Déterminer P.

3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\left(x^2-1\right)\,y' - 4\,x\,y = 3x^2 + x + 1$. Constituent-elles un espace vectoriel ?

4. Un épilogue Python.

   (a) Programmer en Python une fonction PHIPHI ayant pour paramètre d'entrée une liste $L = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ représentant le polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$, et qui renvoie la liste des coefficients de $\left(X^2-1\right)\,P' - 4X\,P$. Pour cela, utiliser des fonctions auxiliaires : une fonction DERIVE(P) qui renvoie la liste des coefficients de P' à partir de ceux de P, et une fonction FOIS_XN(P,n) qui renvoie la liste des coefficients de X^nP à partir de ceux de P.

   (b) Quelle liste est-elle renvoyée si l'on tape l'instruction PHIPHI([−0.25,−1]) ?