Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°15 - A préparer pour le mercredi 23 mars 2016

« Loi de Khi-Deux »

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi Normale Centrée Réduite.

1. Rappeler la formule explicite de la densité φ de la Loi Normale Centrée Réduite.

2. Démontrer que X_1^2 est une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0.$$

3. Loi de $X_1^2 + X_2^2$

(a) Soit x un réel strictement positif fixé.
Prouver l'égalité : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = \pi$

Indication : procéder au changement de variable $t = x\cos^2\theta$ où $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Calculer le produit de convolution $f * f$ et donner une densité de $X_1^2 + X_2^2$.

4. Loi de $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_r^2$

(a) Soit r un entier naturel au moins égal à 1 et x un réel strictement positif fixé.
Prouver l'égalité : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t = 2x^{\frac{r+1}{2}-1}W_{r-1}$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Indication : procéder au changement de variable $t = x\cos^2\theta$ où $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Prouver, à l'aide du produit de convolution et par récurrence sur r que que la variable $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_r^2$ admet une densité f_r définie par :

$$f_r(x) = \mathrm{C}_r\, x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \text{ si } x \geq 0, \quad \text{et} \quad f_r(x) = 0 \text{ si } x < 0,$$

où C_r est une constante que vous ne chercherez pas à calculer mais que l'on déterminera dans la suite du problème.

5. Calcul de C_1 et C_2.

(a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$.

(b) En déduire la constante C_1 et vérifier ce résultat avec la question 2.

(c) Déterminer la valeur de la constante C_2.

6. Calcul des C_r.
Soit r un nombre entier non nul.

(a) Soient $0 < \varepsilon < t$. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^t x^{\frac{r}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^t x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$.

En déduire par récurrence l'existence de l'intégrale $J_r := \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$ et exprimer J_{r+2} en fonction de J_r.

(b) Donner les expressions de J_{2k} en fonction de l'entier $k \in \mathbf{N}^*$ et de J_{2k+1} en fonction de $k \in \mathbf{N}$.

(c) Prouver : $\forall k \in \mathbf{N}$, $\mathrm{C}_{2k+1} = \dfrac{2^k k!}{\sqrt{2\pi}\,(2k)!}$ et $\mathrm{C}_{2k+2} = \dfrac{1}{k!\,2^{k+1}}$.