Correction du devoir n°14

1. $S(x) = 1 - \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\forall t \in [x, +\infty[,\ 0 \leqslant x \leqslant t$, donc $0 \leqslant x\,S(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} x\,f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$

2. X admet une espérance donc $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$.

   Ainsi $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{x}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\,S(x) = 0}$$

   Par intégration par partie sur tout segment $[x, A]$ pour A quelconque supérieur à x, on a :

   $\displaystyle\int_{x}^{A} (t-x)\,f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[(t-x)\,S(t)\Big]_{x}^{A} + \int_{x}^{A} 1 \times S(t)\mathrm{d}t$ et par passage à la limite lorsque $A \to +\infty$
   $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} (t-x)\,f(t)\,\mathrm{t} = 0 + \int_{x}^{+\infty} 1 \times S(t)\mathrm{d}t$ car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A\,S(A) = \lim_{A\to+\infty} x\,S(A) = 0$

3. (a) $P\Big(X \leqslant t \,/\, X > x\Big) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x \\ \frac{P(x \leqslant X \leqslant t)}{P(X>x)} & \text{sinon} \end{cases}$ donc si $t \geqslant x$, $F_X^{[X>x]}(t) = \dfrac{S(x) - S(t)}{S(x)}$ et 0 si $t < x$.

   (b) $F_X^{[X>x]}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]x, +\infty[$ et sur $-]\infty, x[$, de plus $\displaystyle\lim_{t\to x^-} F_X^{[X>x]}(t) = \lim_{t\to x^+} F_X^{[X>x]}(t) = 0$ donc $F_X^{[X>x]}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi X admet une densité conditionnée par $[X > x]$ et, sauf éventuellement en 0, une densité conditionnelle de X est donnée par $f_X^{[X>x]}(t) = -\dfrac{S'(t)}{S(x)} = \dfrac{f(t)}{S(x)}$ si $t \geqslant x$ et 0 sinon.

   (c) $f_X^{[X>x]}$ est nulle sur $-]\infty, x[$ donc d'après l'égalité obtenue à la question 2, on a :
   $E_{X>x} = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} (t-x)\,\frac{f(t)}{S(x)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{S(x)} \int_{x}^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$

4. (a) Soit $g(x) = \dfrac{1}{S(x)} \displaystyle\int_{x}^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$; g s'exprime en fonction de S et d'une primitive de S, donc g est dérivable, et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
   $\forall x \geqslant 0,\ g'(x) = -\dfrac{S'(x)}{S^2(x)} \displaystyle\int_{x}^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{S(x)} \times (-S(x)) = -1 - \frac{S'(x)}{S(x)}\,g(x)$, g est donc bien solution de l'équation différentielle annoncée.

   (b)
   - $E_{X>x}(X - x) = a$ donne $\forall x > 0,\ S'(x)\,a = -(1+0)S(x)$ donc $S(x) = K\mathrm{e}^{-x/a}$; à condition que a soit non nul. Comme $F(x) = 1 - K\,\mathrm{e}^{-x/a}$ avec $F(0) = 0$, on en déduit $K = 1$ et $a > 0$.
     On reconnait la fonction de survie de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{a}$.

     $$\boxed{\forall x > 0,\ S(x) = \mathrm{e}^{-x/a} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}}$$

   - $E_{X>x}(X - x) = a + x$ donne $\forall x > 0,\ S'(x)\,(a+x) = -2\,S(x)$ donc il existe une constante K telle que $\forall x > 0,\ S(x) = \dfrac{K}{(a+x)^2}$, et $a > 0$. À nouveau, $F(x) = 1 - \frac{K}{(a+x)^2}$ donc $K = a^2$ puisque $F(0) = 0$.

     $$\boxed{\forall x > 0,\ S(x) = \frac{a^2}{(x+a)^2} \quad , \quad f(x) = \frac{2\,a^2}{(x+a)^3}}$$

   - $E_{X>x}(X - x) = \dfrac{1}{a+x}$ donne $\forall x > 0,\ \dfrac{S'(x)}{a+x} = -\left(1 - \dfrac{1}{(a+x)^2}\right) S(x)$, donc S vérifie :
     $S'(x) + \left(a + x - \dfrac{1}{a+x}\right) S(x) = 0$ et il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0,\ S(x) = K\,(a+x)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x+a)^2}{2}}$.
     $F(0) = 0$ entraine $K = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{a^2}{2}}}{a}$ et $a > 0$.

     $$\boxed{\forall x > 0,\ S(x) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\,\mathrm{e}^{-ax-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad f(x) = \frac{(x+a)^2 - 1}{a} \times \mathrm{e}^{-ax-\frac{x^2}{2}}}$$