Mathématiques - 2 BCPST 1 - Lycée Michel Montaigne

DM N°11 - Entraînement du 15 au 18 février 2016

« Temps d'attente de défaillances - Antirépartition & Espérance »

Exercice 1

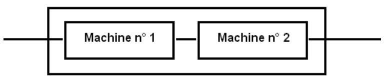
Un dispositif est constitué de machines dont l'état est indépendant de celui des autres. Ces machines peuvent être reliées de différentes façons :

- Ces machines sont dites « en série » , si le dispositif est en panne dès que l'une d'elles est en panne.
- Ces machines sont dites « en parallèle » , si le dispositif est en panne à la seule condition que toutes les machines le soient.

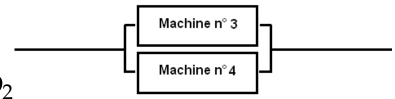
Considérons alors les trois dispositifs suivants :

- Le premier $\mathcal{D}_1$, dispositif « série » , est constitué de deux machines en série.
- Le deuxième $\mathcal{D}_2$, dispositif « parallèle » , est constitué de deux machines en parallèle.
- Le troisième $\mathcal{D}_3$, dispositif « mixte » , est constitué de trois machines .

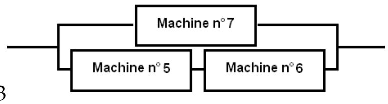
$\mathcal{D}_1$



$\mathcal{D}_2$



$\mathcal{D}_3$



Hypothèses :

- Toutes les machines sont en état de marche à l'instant $t = 0$..
- La probabilité pour chaque machine de n'avoir subi aucune panne entre les instants 0 et t vaut $q_t = \exp(-t)$.

Notations :

Le temps d'attente d'une première panne de la machine M_i est un aléa noté X_i. où i varie de 1 à 7.

Les temps d'attente d'une première panne globale sur les dispositifs $1,\ 2,\ 3$ seront notées respectivement $Y_1,\ Y_2,\ Y_3$.

1. Dans cette première question, nous considérerons un résultat ω de cette expérience aléatoire pour lequel les valeurs de $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7$ valent respectivement :

$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$X_3(\omega)$	$X_4(\omega)$	$X_5(\omega)$	$X_6(\omega)$	$X_7(\omega)$
1,09	2,28	1,11	1,80	0,24	2,09	0.26

- À l'instant t = 1,5 , indiquer les machines puis les dispositifs qui sont déjà tombés en panne.
- Par un raisonnement analogue, compléter le tableau suivant (dont vous venez de déterminer la colonne t=1,5)

	t = 0	t = 0,5	t = 1	t = 1,5	t = 2	t = 2,5	t = 3
D_1	1						
D_2	1						
D_3	1						

où $\begin{cases} D_1 = 1 \text{ si le dispositif 1, n'a subi aucune panne entre les instants 0 et t et vaut 0 sinon} \\ D_2 = 1 \text{ si le dispositif 2, n'a subi aucune panne entre les instants 0 et t et vaut 0 sinon} \\ D_3 = 1 \text{ si le dispositif 3, n'a subi aucune panne entre les instants 0 et t et vaut 0 sinon} \end{cases}$

2. De manière générale, que peut-t-on dire de $X_1(\omega)$ si la machine M_1 n'a subi aucune panne entre les instants 0 et t ?
   En déduire en vous appuyant sur les hypothèses la valeur de $P(X_1 \leq t)$ pour tout réel $t \geq 0$.
   Vérifiez que X_1 suit la Loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

3. Avant de nous lancer dans des calculs compliqués, nous allons faire une simulation du problème à l'aide de l'algorithme ci-joint :

```
1  from numpy import *
2  from random import *
3  #**********************************************
4  def simulation(Lambda):
5      X,Y=[0]*8,[0]*4
6      for i in range(1,8):
7          X[i]=-log(random())/Lambda
8      if X[1]<=X[2]:
9          Y[1]=X[1]
10     else:
11         Y[1]=X[2]
12     if X[3]<=X[4]:
13         Y[2]=X[4]
14     else:
15         Y[2]=X[3]
16     if X[5]<=X[6]:
17         if X[5]<=X[7]:
18             Y[3]=X[7]
19         else:
20             Y[3]=X[5]
21     else:
22         if X[6]<=X[7]:
23             Y[3]=X[7]
24         else:
25             Y[3]=X[6]
26     return X[1:8],Y[1:4]
27 #**********************************************
28 def Stat(N,Lambda):
29     S=array([0,0,0])
30     for i in range(N):
31         [X,Y]=simulation(Lambda)
32         S=S+Y
33     return S/N
34 #**********************************************
35 Y=Stat(10000,1)
36 print('S='+str(Y))
```

(a) L'instruction n°7 exécutée pour i =1 et n'est autre que, « **X(1)=-log(rand)/**Lambda ».
Vérifiez que la valeur de X_1 ainsi calculée est aléatoire de Loi exponentielle de paramètre λ =Lambda.

(b) Commenter les lignes 8 à 15 du script de la fonction simulation.

(c) Commenter les lignes 16 à 25 du script de la fonction simulation.

(d) Lors de l'exécution de l'instruction Y = Stat(100000,1), nous avons enregistré la réponse suivante :
Y =[0.4995 1.5095 1.1667]
Que réprésente concrétement ces résultats ?

4. Nous allons déterminer les lois des variables Y_1, Y_2, Y_3.

(a) Déterminer les fonctions de répartitions de Y_1, Y_2, Y_3.

(b) Montrer que les variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3 admettent des densités.
Précisez ces densités, respectivement f_1, f_2, f_3. Ne reconnaissez-vous pas en l'une d'elle une densité connue ?

(c) Calculer les espérances et les variances de ces variables Y_k

(d) Les résultats obtenus lors des 10000 simulations de l'expérience effectuées à la questions 3d sont-ils conformes aux prévisions ?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$.
On note F la fonction de répartition de X.
On pose pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(x) = \int_0^x t\, f(t)\ \mathrm{d}t$$

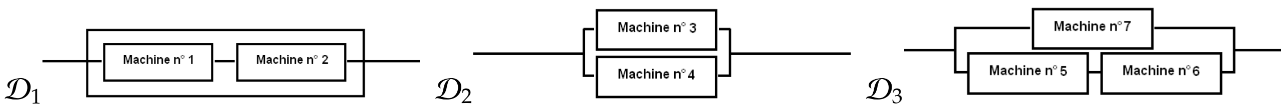
1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \left[1 - F(t)\right] \mathrm{d}t - x\left[1 - F(x)\right]$.

2. On suppose dans cette question que X admet une espérance mathématique, que l'on notera $E(X)$
   (a) Établir, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, l'inégalité : $0 \leq x \int_x^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \leq E(X) - \varphi(x)$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[1 - F(x)\right] = 0$. Prouver alors $E(X) = \int_0^{+\infty} \left[1 - F(t)\right]\ \mathrm{d}t$.

3. On suppose dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left[1 - F(t)\right] \mathrm{d}t$ est convergente.
   (a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. En désignant par φ' la dérivée de φ, calculer pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $\varphi'(x)$, et en déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Justifier le fait que φ admet une limite en $+\infty$. En déduire que X admet une espérance mathématique, que l'on notera $E(X)$.

4. Dresser en une seule phrase le bilan des questions 2 et 3.

Correction du DM N°14
Exercice 1



Résumons cette correction à l'essentiel

- $Y_1 =$
- $Y_2 =$
- $Y_3 =$

Toutes ces variables aléatoires sont à valeurs positives.
Soit t un réel positif

$$\begin{aligned}
[Y_1 > t] &= \\
[Y_2 \leq t] &= \\
[Y_3 \leq t] &=
\end{aligned}$$

Or

- Toutes les machines sont en état de marche à l'instant $t = 0$.
- La probabilité pour chaque machine de n'avoir subi aucune panne entre les instants 0 et t vaut $q_t = \exp(-t)$.
- L'état de chaque machine est indépendant de celui des autres

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y_1 > t) &= \\
\mathrm{P}(Y_2 \leq t) &= \\
\mathrm{P}(Y_3 \leq t) &=
\end{aligned}$$

Les fonctions de répartition des variables aléatoires $Y_1,\ Y_2,\ Y_3$ sont donc $F_1,\ F_2,\ F_3$ définies par

$$\boxed{\begin{aligned}
&\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_1(t) = \left\{ \right. \\
&\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_2(t) = \left\{ \right. \\
&\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_3(t) = \left\{ \right.
\end{aligned}}$$

- Ces fonctions de répartition sont de $\qquad$ sur les ouverts
- D'autre part $\qquad$ pour $k = 1, 2, 3$

$$\boxed{\text{Les fonctions } F_1,\ F_2,\ F_3 \text{ sont donc}}$$

Le théorème de caractérisation des variables à densité permet de conclure

$$\boxed{\begin{aligned}
&Y_1,\ Y_2,\ Y_3 \text{ sont donc des variables de densités respectives } f_1,\ f_2,\ f_3 \text{ obtenues par dérivation} \\
&\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_1(t) = \left\{ \right. \\
&\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_2(t) = \left\{ \right. \\
&\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_3(t) = \left\{ \right.
\end{aligned}}$$

Les espérances des variables $Y_1,\ Y_2,\ Y_3$ valent dont respectivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_1) &= \qquad = \qquad = \\
\mathrm{E}(Y_2) &= \qquad = \qquad = \\
\mathrm{E}(Y_3) &= \qquad = \qquad =
\end{aligned}$$

Les espérances des variables Y_1^2, Y_2^2, Y_3^2 valent dont respectivement :

$$\mathrm{E}\left(Y_1^2\right) = \qquad\qquad = \qquad\qquad =$$
$$\mathrm{E}\left(Y_2^2\right) = \qquad\qquad = \qquad\qquad =$$
$$\mathrm{E}\left(Y_3^2\right) = \qquad\qquad = \qquad\qquad =$$

<u>Conclusion</u> :

$\mathrm{E}(Y_1) =$		$\mathrm{V}(Y_1) =$	$=$
$\mathrm{E}(Y_2) =$	et	$\mathrm{V}(Y_2) =$	$=$
$\mathrm{E}(Y_3) =$		$\mathrm{V}(Y_3) =$	$=$

<u>Analyse de la simulation proposée</u> :

```
1  from numpy import *
2  from random import *
3  #**********************************************
4  def simulation(Lambda):
5      X,Y=[0]*8,[0]*4
6      for i in range(1,8):
7          X[i]=-log(random())/Lambda
8      if X[1]<=X[2]:
9          Y[1]=X[1]
10     else:
11         Y[1]=X[2]
12     if X[3]<=X[4]:
13         Y[2]=X[4]
14     else:
15         Y[2]=X[3]
16     if X[5]<=X[6]:
17         if X[5]<=X[7]:
18             Y[3]=X[7]
19         else:
20             Y[3]=X[5]
21     else:
22         if X[6]<=X[7]:
23             Y[3]=X[7]
24         else:
25             Y[3]=X[6]
26     return X[1:8],Y[1:4]
27 #**********************************************
28 def Stat(N,Lambda):
29     S=array([0,0,0])
30     for i in range(N):
31         [X,Y]=simulation(Lambda)
32         S=S+Y
33     return S/N
34 #**********************************************
35 S=Stat(10000,1)
36 print('S='+str(S))
```

- L'instruction n°3 s'écrit mathématiquement $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(\text{random})$ où random est distribuée selon une Loi uniforme sur $]0,1[$.
  - <u>Univers Image</u> :
    random prend ses valeurs dans ; $\ln(\text{random})$ est : X est
    .
    $$X(\Omega) \subset$$
  - Pour x un réel strictement positif, $[X \leq x] \quad =$
    Or la probabilité de l'événement $[\text{random} \leq t]$ vaut
    donc $\mathrm{P}(X \leq x) = \qquad\qquad =$
  - Pour $x < 0$, $[X \leq x]$

Conclusion :

> La fonction de répartition de la v.a X_k construite à l'instruction 3 est F définie par :
> $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \Bigg\{$
> On reconnait la loi ....

- Les lignes .... permettent de calculer les durées de vie des trois dispositifs.
  - Les lignes..........................permettent de calculer $Y_1 = \min(\qquad)$
  - Les lignes..........................permettent de calculer $Y_2 = \max(\qquad)$
  - Les lignes..........................permettent de calculer $Y_3 = \max(\quad, \min(\qquad))$
- Lors de l'exécution de l'instruction Y = Stat(100000,1), nous avons enregistré la réponse suivante : Y =[0.4995 1.5095 1.1667] dont les trois termes sont effectivement proches de .

Exercice 2

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \int_0^x t\, f(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Intégration par partie

   La fonction $F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est
   Or par hypothèse, f est $\qquad \mathbb{R}^+$

   > F est donc $\qquad \mathbb{R}^+$ et $\forall x > 0, \quad F'(x) =$

   Posons : $\forall t > 0,$ et
   alors : $\forall t > 0,$ et
   Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

   > Les fonctions u et v sont donc de classe C^1, ce qui légitime l'intégration par partie suivante

   Soit x un réel quelconque strictement positif

   $$\int_0^x u(t)\ v'(t)\ \mathrm{d}t =$$

   soit

   $$\int_0^x t\, f(t)\ \mathrm{d}t =$$

   Conclusion :

   $$\boxed{\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \int_0^x \Big[1 - F(t)\Big]\ \mathrm{d}t - x\Big[1 - F(x)\Big]} \qquad (1)$$

2. Le cas où $E(X)$ existe

   On suppose ici que $E(X)$ existe, autrement dit que : $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente

   (a) Première inégalité

   Soit x un réel positif quelconque
   - $\int_x^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente $\left(\int_x^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = P(X > x)\right)$.
   - Par hypothèse, $\int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente : $\int_x^{+\infty} t \times f(t)\ \mathrm{d}t$ l'est également.

   $$\forall t \in [x, +\infty[, \quad 0 \le x \le t \quad \text{d'où} \quad 0 \le \qquad \le$$

   Intégrons membre à membre cette inégalité sur $[x, +\infty[$

   $$0 \le \qquad\qquad \le$$

Or

$$\int_x^{+\infty} \qquad \mathrm{d}t = x \qquad \text{et} \qquad \int_x^{+\infty} \qquad \mathrm{d}t = \underbrace{\qquad\qquad}_{E(X)} - \underbrace{\qquad\qquad}_{\varphi(x)}$$

Nous pouvons donc conclure

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 0 \leq x \int_x^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \leq E(X) - \varphi(x)} \tag{2}$$

(b) Autre expression de $E(X)$

Par hypothèse, $\qquad\qquad$ est convergente, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = \qquad .$
Ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = $$

Le théorème des gendarmes et l'inégalité obtenue en (2) conduisent à

$$\lim_{x \to +\infty} \qquad\qquad = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{x \to +\infty} \qquad\qquad = 0$$

L'égalité obtenue en (1) s'écrit : $\forall x > 0, \qquad\qquad = \qquad\qquad + \varphi(x)$
Or $\qquad \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\qquad\qquad \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} E(X)$
de sorte que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \left[1 - F(t)\right] \mathrm{d}t = $
Conclusion :

$$\boxed{\text{Si } E(X) \text{ existe, alors : } \quad E(X) = \int_0^{+\infty} \left[1 - F(t)\right] \mathrm{d}t}$$

3. Réciproque

On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left[1 - F(t)\right] \mathrm{d}t$ est convergente.

(a) Variations de φ sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \int_0^x t\, f(t)\ \mathrm{d}t$$

En tant qu'intégrale fonction de sa borne supérieure, φ est dérivable en

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi \text{ est donc dérivable sur } \qquad\qquad \text{ et } \quad \forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \qquad\qquad \geq 0 \\ \varphi \text{ est donc } \qquad\qquad \text{ sur } \mathbb{R}^+ \end{array}}$$

(b) Existence de $E(X)$.

L'égalité obtenue en (1) s'écrit : $\forall x > 0, \quad \varphi(x) = $
Compte tenu de la positivité de $\qquad\qquad$ et de la convergence supposée de

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) \leq \int_0^x \qquad\qquad \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \qquad\qquad \mathrm{d}t$$

Ainsi φ est une fonction croissante et majorée sur $[0, +\infty[$
Le théorème de la convergence monotone pour les fonctions permet de conclure

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi \text{ admet une limite } L \text{ finie en } +\infty \\ \varphi(x) = \int_{-\infty}^x t\, f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x t\, f(t)\ \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L \end{array}}$$

L'intégrale $\qquad\qquad$ est donc convergente
Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \int_0^{+\infty} \left[1 - F(t)\right] \mathrm{d}t \text{ est convergente} \\ \text{alors la variable aléatoire } X \text{ admet } \qquad\qquad\qquad . \end{array}}$$

4. Bilan

Nous venons de prouver l'équivalence :

$$\text{existe} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \qquad \mathrm{d}t \text{ convergente}$$

Nous avons montré

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \qquad \mathrm{d}t \text{ convergente} \Rightarrow E(X) = \int_0^{+\infty} \qquad \mathrm{d}t}$$