Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°9 - A rendre le vendredi 29 janvier 2016

≪ Algèbre linéaire - Séries multiples - Standardisation & Décorrélation ≫

EXERCICE I
Considérons une classe de 10 élèves dont les notes en Math et en Sciences Physiques sont consignées dans le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	8.8	10.8	12.2	9.7	10.8	11.5	8.1	9.7	14.5	19.2
y_i	7.6	9.2	9.0	8.3	9.0	12.8	7.8	6.5	13.7	14.9

où x_i est la note en math de l'élève n°i
y_i est la note en physique de l'élève n°i

Nous désignerons par S la liste définie par $\mathrm{S} = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ où X et Y sont les listes définies par :

$$\mathrm{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}] \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}]$$

On désigne par matrices des Variances-Covariances de la série double $\mathrm{S} = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} V_x & V_{xy} \\ V_{xy} & V_y \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} V_x & \text{est la variance de la série statistique } X \\ V_y & \text{est la variance de la série statistique } Y \\ V_{xy} & \text{est la covariance de la série statistique double } Y \end{cases}$$

1. Nous vous proposons le script incomplet suivant :

```
import numpy as np
def MatVarCov(X,Y):
    n=len(X)
    SX,SY,SXX,SYY,SXY=0,0,0,0,0
    for k in range(n):
        SX= ______________
        SY= ______________
        SXX= ______________
        SYY= ______________
        SXY= ______________
    VX= ______________
    VY= ______________
    COVXY= ______________
    A=np.matrix([[VX,COVXY],[COVXY,VY]])
    return A
#******************PROGRAMME PRINCIPAL**************
X=[8.8,10.8,12.2,9.7,10.8,11.5,8.1,9.7,14.5,19.2]
Y=[7.6,9.2,9.0,8.3,9.0,12.8,7.8,6.5,13.7,14.9]
A=MatVarCov(X,Y)
print('La matrice de Variance-Covariance de la série Statistique [X,Y] vaut : ')
print(A)
```

Completer le script de sorte que lors de son exécution, nous obtenions :

```
La matrice de Variance-Covariance de la série Statistique [X,Y] vaut :
[[ 9.5081   7.2746]
 [ 7.2746   7.3776]]
```

$$\text{où} \quad \begin{array}{lcll} V_x & = & 9.5081 & \text{est la variance de la série statistique } X \\ V_y & = & 7.3776 & \text{est la variance de la série statistique } Y \\ V_{xy} & = & 7.2746 & \text{est la covariance de la série statistique double } Y \end{array}$$

Vérifier que le coefficient de corrélation du couple (X, Y) vaut : 0.868 57

2. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 9.5081 & 7.2746 \\ 7.2746 & 7.3776 \end{pmatrix}$.
Vérifier votre résultat en exécutant le script suivant :

```
SpectreA=np.linalg.eigvals(A)
print('Les valeurs propres de A sont : ',SpectreA[0],' et ',SpectreA[1])
```

3. Déterminer deux vecteurs propres associés aux deux valeurs propres trouvées précédemment. Justifier qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à cette nouvelle base.
Vérifier votre résultat en exécutant le script suivant :

```
ElementsPropres=np.linalg.eig(A)
P=ElementsPropres[1]
print('La matrice de passage P vaut : ')
print(P)
```

4. Que vaut le produit $P^{-1}AP$? (*Rappel : vous devez justifier votre réponse sans effectuer le moindre calcul !)*
Vérifier votre résultat en exécutant le script suivant :

```
D=np.diag(SpectreA)
print(' le produit P*D*P**(-1) vaut : ')
print(P*D*P**(-1))
```

5. Construire alors une matrice carrée R dont les valeurs propres sont positives et vérifiant : $R^2 = A$.
Vérifier votre résultat en exécutant le script suivant :

```
Delta=np.diag(np.sqrt(SpectreA))
R=P*Delta*P**(-1)
print(' le produit R=P*Delta*P**(-1) vaut : ')
print(R)
print(' le carré de la matrice R vaut : ')
print(R**2)
```

6. Déterminer la matrice R^{-1}.
Vérifier votre résultat en exécutant le script suivant :

```
print(' la matrice inverse de R est : ')
print(R**(-1))
```

7. On pose désormais pour chacun des 10 élèves : $\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$
La série statistique double de départ $\mathrm{S} = [X, Y]$ a été transformée en une nouvelle série statistique $\mathrm{T} = [U, V]$ où

$$\mathrm{U} = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}] \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}]$$

Donner les dix termes de chacune des deux listes U et V.
Vérifier votre résultat en exécutant le script suivant :

```
toto=R**(-1)*np.matrix([X,Y])
U=[toto[0,i] for i in range(10)]
V=[toto[1,i] for i in range(10)]
print('La liste U vaut : ')
print(U)
print('La liste U vaut : ')
print(V)
```

8. Montrer que :
La variance de la série statistique U vaut : $V_u = 1$
La variance de la série statistique V vaut $V_v = 1$
La covariance de la série statistique double $T = [U, V]$ vaut : $V_{uv} = 0$
Vérifier votre résultat en exécutant le script suivant :

```
B=MatVarCov(U,V)
print('La matrice de Variance-Covariance de la série Statistique [U,V] vaut : ')
print(B)
```

EXERCICE II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 10 et f un endomorphisme de E.
Nous supposerons que f admet exactement 10 valeurs propres **distinctes** et **strictement positives**.
Nous aimerions construire tous les endomorphismes g de E tels que : $g \circ g = f$ et montrer qu'il y en a exactement 1024.
Nous noterons $\mathscr{B} = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_{10}} \rangle$ une base de E constituée de vecteurs propres de f et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{10}$ les valeurs propres respectivement associées à ces vecteurs propres $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_{10}}$.

1. Justifier l'existence d'une telle base.

2. Nous supposerons dans cette question que g est un endomorphisme de E tel que $g \circ g = f$.

(a) Montrer que g commute avec f.

(b) En déduire que les vecteurs $g(\overrightarrow{u_i})$ sont des vecteurs propres de f.

(c) Justifier alors que chaque vecteur $g(\overrightarrow{u_i})$ est colinéaire à $\overrightarrow{u_i}$ autrement dit l'existence de réels μ_i tel que : $g(\overrightarrow{u_i}) = \mu_i \overrightarrow{u_i}$

(d) Prouver que : $\mu_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$.

3. Conclure !