Corrigé du devoir maison

PARTIE I

1. $\forall i \in \{1,2,3\}\,, \forall k \in \{1,\cdots,r\}$ U_{ik} suit une loi de Bernoulli de paramètre $e^{\frac{-\lambda}{10^{i-1}}}$.
   A est la somme de r variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Bernoulli de même paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$; par conséquent $A \hookrightarrow \mathscr{B}\left(r\,,\,1-e^{-\lambda}\right)$.
   De même, B et C suivent des lois binômiales :
   $$\boxed{A \hookrightarrow \mathscr{B}\left(r\,,\,1-e^{-\lambda}\right) \quad ; \quad B \hookrightarrow \mathscr{B}\left(r\,,\,1-e^{\frac{-\lambda}{10}}\right) \quad ; \quad C \hookrightarrow \mathscr{B}\left(r\,,\,1-e^{\frac{-\lambda}{100}}\right)}$$
2. Les variables aléatoires A, B et C sont mutuellement indépendantes, donc les événements $[A=a]$, $[B=b]$ et $[C=c]$ sont mutuellement indépendants et
   $$\begin{aligned} L_\lambda(a,b,c) &= P(A=a)\times P(B=b)\times P(C=c) \\ &= \binom{r}{a}\left(1-e^{-\lambda}\right)^a\left(e^{-\lambda}\right)^{r-a} \times \binom{r}{b}\left(1-e^{\frac{-\lambda}{10}}\right)^b\left(e^{\frac{-\lambda}{10}}\right)^{r-b} \times \binom{r}{c}\left(1-e^{\frac{-\lambda}{100}}\right)^c\left(e^{\frac{-\lambda}{100}}\right)^{r-c} \end{aligned}$$
   $$\boxed{L_\lambda(a,b,c) = \binom{r}{a}\binom{r}{b}\binom{r}{c}\, e^{\lambda\,(-1,11\,r+a+0,1\,b+0,01\,c)}\left(1-e^{-\lambda}\right)^a\left(1-e^{\frac{-\lambda}{10}}\right)^b\left(1-e^{\frac{-\lambda}{100}}\right)^c}$$
3. On vérifie alors que $f_{a,b,c}(\lambda) = \ln\left(L_\lambda(a,b,c)\right) = \ln\left(\binom{r}{a}\binom{r}{b}\binom{r}{c}\right) + \lambda\,(-1,11\,r + a + 0,1\,b + 0,01\,c) + a\,\ln\left(1-e^{-\lambda}\right) + b\,\ln\left(1-e^{\frac{-\lambda}{10}}\right) + c\,\ln\left(1-e^{\frac{-\lambda}{100}}\right)$ donc $K = \ln\left(\binom{r}{a}\binom{r}{b}\binom{r}{c}\right)$.
4. (a) Pour les valeurs données on obtient :
   $$\begin{aligned} f_{5,2,0}(\lambda) &= \ln\left(\binom{5}{5}\binom{5}{2}\binom{5}{0}\right) + \lambda\,(-5,55+5+0,2) + 5\,\ln\left(1-e^{-\lambda}\right) + 2\,\ln\left(1-e^{\frac{-\lambda}{10}}\right) \\ &= \ln 10 - 0,35\,\lambda + 5\,\ln\left(1-e^{-\lambda}\right) + 2\,\ln\left(1-e^{-0,1\,\lambda}\right) \end{aligned}$$
   (b) $f_{5,2,0}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g(\lambda) = -0,35 + \dfrac{5\,e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} + \dfrac{0,2\,e^{-0,1\,\lambda}}{1-e^{-0,1\,\lambda}} = -5,55 + \dfrac{5}{1-e^{-\lambda}} + \dfrac{0,2}{1-e^{-0,1\,\lambda}}$
   g est continue (et même dérivable) sur $]0,+\infty[$; $\lim\limits_{\lambda\to 0} g(\lambda) = +\infty$; $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} g(\lambda) = -0,35$ donc g par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $]0,+\infty[$.

PARTIE II

1. g est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$; $\lim\limits_{\lambda\to 0} g(\lambda) = +\infty$; $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} g(\lambda) = -0,35$ donc g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $]-0,35\,;\,+\infty[$; ainsi g s'annule en un point unique de $]0,+\infty[$.
2. g étant décroissante, elle est positive pour $x < \lambda_{\max}$ et négative pour $x > \lambda_{\max}$, donc $f_{5,2,0}$ est croissante sur $]\,0\,;\,\lambda_{\max}\,[$ et décroissante sur $]\,\lambda_{\max}\,;\,+\infty[$; comme exp est une fonction croissante, $\lambda \mapsto L_\lambda(5,2,0)$ est également croissante sur $]\,0\,;\,\lambda_{\max}\,[$ et décroissante sur $]\,\lambda_{\max}\,;\,+\infty[$.
   Ainsi $\lambda_{\max}$ réalise le maximum de la fonction $L_\lambda(5,2,0)$, c'est à dire le maximum de vraisemblance.
3.

```python
import numpy as np
from math import exp, log, factorial
from matplotlib.pyplot import *
#**************** Probabilités ****************#
def ProbaBinomiale(N,p,k):
    prob=factorial(N)*(p**k)*((1-p)**(N-k))/(factorial(k)*factorial(N-k))
    return prob
```

```
def Proba(Lambda, Resultat, r):
    R=1
    for k in range(len(Resultat)):
        p=ProbaBinomiale(r,1-exp(-Lambda/(10**k)),Resultat[k])
        R=R*p
    return R
# ***********************************************#
def CourbeProba(Resultat,a,b,r):
    X=np.linspace(a,b,1000)
    Y=[Proba(Lambda,Resultat,r) for Lambda in X]
    plot(X,Y,label=str(Resultat))
    legend()
# ***********************************************#
def g(x,Resultat,r,Epsilon):
    y=(Proba(x+Epsilon,Resultat,r)-Proba(x,Resultat,r))/Epsilon
    return y
# ***********************************************#
def PartieEntiereZero(g,Resultat,r):
    a=1
    while g(a,Resultat,r,1)>0:
        a=a+1
    return a-1
#***********************************************#
def Zero(g,Epsilon,Resultat,r):
    a=PartieEntiereZero(g,Resultat,r)
    b=a+1
    while abs(b-a)>Epsilon:
        if g((a+b)/2,Resultat,r,Epsilon)<0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return a
#***************** Programme ********************#
Resultat=[5,2,0];a=0;b=20;r=5
NPP=Zero(g,0.00000001,Resultat,r)
CourbeProba(Resultat,a,b,r)
ProbaMax=Proba(NPP,Resultat,r)
plot([NPP,NPP],[0,ProbaMax],'o-',color='black')
plot([0,NPP],[ProbaMax,ProbaMax],'o-',color='black')
```

PARTIE III

```
from numpy import *
from random import *
# ***************** Aléa de poisson ***************** #
def ALEA_POISSON(Lambda):
    Hasard=random()
    N=0
    while Hasard>exp(-Lambda):
        N+=1
        Hasard=Hasard*random()
    return N
```

```
# **************** Simulation ******************** #
def SIMULATION(r,Lambda):
    A=0;B=0;C=0
    for k in range(r):
        A+=(ALEA_POISSON(Lambda)>0)
        B+=(ALEA_POISSON(Lambda/10)>0)
        C+=(ALEA_POISSON(Lambda/100)>0)
    return [A,B,C]
#**************************PROGRAMME PRINCIPAL**********************
Lambda=1.3
Resultats=[SIMULATION(5,Lambda) for k in range(10)]
print(Resultats)
```

PARTIE IV

1. La probabilité qu'un micro-organisme soit dans le millilitre prélevé est de $\frac{1}{10}$ et on admet l'indépendance des positions des micro-organismes au sein de la solution. Sachant l'événement $[X=n]$ réalisé, Y suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{10}$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ P_{[X=n]}(Y=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}}$$

2. Les événements $[X=n]$ pour $n\in\mathbb{N}$ constituent un système complet donc

$\forall k\in\mathbb{N},\ [Y=k]=\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty}\big([Y=k]\cap[X=n]\big)=\bigcup_{n=k}^{\infty}\big([Y=k]\cap[X=n]\big).$

On en déduit $P\big(Y=k\big)=\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}P(X=n)\times P_{[X=n]}(Y=k)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}\times\binom{n}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}.$

On fait le changement d'indice $j=n-k$: $P\big(Y=k\big)=\dfrac{e^{-\lambda}}{10^k\,k!}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j+k}}{j!}\left(\frac{9}{10}\right)^{j}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{10^k\,k!}\times\exp\left(\frac{9\,\lambda}{10}\right)$

par conséquent :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ P(Y=k)=\frac{\lambda^k}{10^k\,k!}\,\exp\left(\frac{-\lambda}{10}\right)\ \text{donc } Y\hookrightarrow\mathscr{P}\left(\tfrac{\lambda}{10}\right)}$$

3. $X-Y$ représente le nombre de micro-organismes restés dans les 9 millilitres non prélevés ; sachant que $[X=n]$, ce nombre suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{9}{10}$, donc pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$P_{[X=n]}(X-Y=k)=\dbinom{n}{k}\left(\dfrac{9}{10}\right)^{k}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-k}$ Un calcul similaire au précédent donne alors

$\forall k\in\mathbb{N},\ P(X-Y=k)=\dfrac{(9\,\lambda)^k}{10^k\,k!}\,\exp\left(\dfrac{-9\,\lambda}{10}\right)$ donc $X-Y\hookrightarrow\mathscr{P}\left(\frac{9\,\lambda}{10}\right)$

4. Soient $(k,j)\in\mathbb{N}^2$, on compare $P_{[Y=j]}(X-Y=k)$ et $P(X-Y=k)$:

$$P_{[Y=j]}(X-Y=k)=\frac{P\big([X=k+j]\cap[Y=j]\big)}{P\big(Y=j\big)}=\frac{P\big([X=k+j]\times P_{[X=k+j]}\big([Y=j]\big)}{P\big(Y=j\big)}$$

$$=\frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+j}}{(k+j)!}\times\binom{k+j}{j}(0,1)^j\,(0,9)^k}{\frac{e^{-0,1\,\lambda}\,(0,1\,\lambda)^j}{j!}}=\frac{e^{-0,9\,\lambda}\,(0,9\,\lambda)^k}{k!}=P(X-Y=k)$$

$\forall(k,j)\in\mathbb{N}^2,\ P_{[Y=j]}(X-Y=k)=P(X-Y=k)$ donc les variables Y et $X-Y$ sont indépendantes.