Corrigé du devoir maison

EXERCICE N°1 - Séries

1. $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$ donc (u_n) est décroissante.
   On montre par récurrence sur n que (u_n) est à valeurs positives :
   • $n = 1 : u_1 = \dfrac{1}{2} > 0$
   • Soit $n \geqslant 1$, on suppose que $0 < u_n$; alors $u_{n+1} = u_n\ (1 - u_n) > 0$ car $0 < u_n \leqslant u_1 < 1$
   On en déduit que la suite (u) converge car elle est décroissante et minorée par 0 ; soit ℓ sa limite. $(u_n) \to \ell$, de même $(u_{n+1}) \to \ell$ donc par passage à la limite, $\ell = \ell - \ell^2$ et $\ell = 0$.

   $$\boxed{\text{La suite } (u) \text{ est décroissante et converge vers 0.}}$$

2. Soit $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n^2 = \sum_{n=1}^{N} u_n - u_{n+1} = u_1 - u_{N+1}$ (somme télescopique) ; $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} u_N = 0$ donc

   $$\boxed{\text{La série } \sum u_n^2 \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = u_1 = \frac{1}{2}.}$$

3. Montrons cette formule par récurrence sur n : elle est vraie pour $n = 1$ car un produit vide est par convention égal à 1, donc la formule se réduit à $u_1 = u_1$.
   Soit $n \geqslant 1$, supposons alors que $u_n = u_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - u_k)$; $u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n\ (1 - u_n)$. On obtient donc
   $u_{n+1} = u_n\ (1 - u_n) = \left(u_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - u_k)\right) \times (1 - u_n) = u_1 \prod_{k=1}^{n}(1 - u_k)$ et l'hérédité est démontrée.
   On en déduit $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ln(1 - u_n) = \ln\left(\prod_{n=1}^{N}(1 - u_n)\right) = \ln\left(\frac{u_{N+1}}{u_1}\right) = \ln(2\,u_{N+1})$, puis $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \ln(2\,u_{N+1}) = -\infty$.
   Par conséquent

   $$\boxed{\text{La série } \sum \ln(1 - u_n) \text{ diverge.}}$$

   On montre à présent que la série $\sum u_n$ diverge : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} u_N = 0$ donc $-\ln(1 - u_N) \underset{N\to\infty}{\sim} u_N$
   Par conséquent il existe une suite (α_n) convergeant vers 1, telle que $u_n = -\ln(1 - u_n)\ \alpha_n$ et donc un entier n_0 tel que $\forall N \in \mathbb{N},\ (N \geqslant n_0) \Rightarrow \alpha_N \geqslant \dfrac{1}{2}$
   Pour $N \geqslant n_0$, $u_N \geqslant -\frac{1}{2} \ln(1 - u_n)$; u_N est minoré par le terme général d'une série à termes positifs divergente, donc

   $$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

4. L'inégalité à prouver est équivalente à $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k^2$
   Considérons une variable aléatoire X_n donc l'univers image $X_n(\Omega)$ est égal à $\{u_1, \dots u_n\}$ et telle que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X_n = u_k) = \dfrac{1}{n}$. On remarque alors que $E(X_n) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)$ et $E(X_n)^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2$
   La variance de X_n est nécessairement positive, donc $E(X_n)^2 - \big(E(X_n)\big)^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 \geqslant 0$.
   $\sum u_n^2$ converge donc la suite des sommes partielles est majorée (par exemple par sa somme S) donc
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sqrt{n \sum_{k=1}^{n} u_k^2} \leqslant \sqrt{n \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2} = \sqrt{n\,S}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{=} o(n)$.

EXERCICE N°2 - Tirages dans une urne

1. (a) On a $A_n = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$ donc par la formule des probabilités composées :
$q_n = P(A_n) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \cdots \times P_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}}(B_n)$
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, si on a déjà obtenu k boules blanches au cours des k premiers tirages, alors l'urne contient exactement u_k boules blanches avant le tirage suivant (puisque $u_0 = b$) et toujours b boules noires. Par conséquent $P_{B_1\cap\ldots\cap B_k}(B_{k+1}) = \dfrac{u_k}{b+u_k}$ et

$$\boxed{q_n = \frac{b}{2\,b} \times \cdots \times \frac{u_{n-1}}{b+u_{n-1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{b+u_k}}$$

(formule valable aussi pour $k = 0$ car $u_0 = b$ donc $\frac{b}{2\,b} = \frac{u_0}{b+u_0}$).

(b) Par la formule précédente, on a $q_{n+1} = q_n \times \dfrac{u_n}{b+u_n} < q_n$ puisque $b > 0$ donc $0 < u_n < b + u_n$.

Ainsi, la suite (q) est décroissante, minorée par 0, elle converge donc vers ℓ avec $0 \leqslant \ell < q_1 = \dfrac{1}{2}$.

(c) Soit $n \geqslant 2$;obtenir une boule noire au n^{e} tirage suppose que le n^{e} tirage a lieu, donc qu'on a obtenu $n-1$ boules blanches au cours des $n-1$ premiers tirages, c'est à dire que l'événement A_{n-1} est réalisé.
Ainsi $p_n = P\left(A_{n-1} \cap \overline{B}_n\right) = P\left(A_{n-1}\right) \times P_{A_{n-1}}\left(\overline{B}_n\right) = P\left(A_{n-1}\right) \times \dfrac{b}{b+u_{n-1}} = q_{n-1} \times \left(1 - \dfrac{u_{n-1}}{b+u_{n-1}}\right)$

Finalement $p_n = q_{n-1} - q_n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + \sum_{k=2}^{n} (q_k - q_{k-1}) = \underbrace{p_1 + q_1}_{1} - q_n = 1 - q_n$

On pouvait aussi remarquer que, les événements N_k=« Obtenir une boule noire au k^{e} tirage » étant deux à deux incompatibles, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k$ est la probabilité d'obtenir une boule noire au plus tard au n^{e} tirage, qui est l'événement contraire de A_n.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 - \ell$

(d) On remarque que $E = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{N}_k$, ou encore $\overline{E} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ donc, $P\left(\overline{E}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P\left(N_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k$, donc

$$\boxed{P(E) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k = \ell}$$

(e) • Supposons que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge ; pour $x > 0$, $0 < \ln(1+x) \leqslant x$ donc
$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{u_n}$
Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{u_n}$ converge.

• Réciproquement, si la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$ converge, alors son terme général tend vers 0 donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$ et $\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{u_n}$

Par conséquent il existe une suite (α_n) convergeant vers 1, telle que $\dfrac{1}{u_n} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) \alpha_n$ et donc un entier n_0 tel que $\forall N \in \mathbb{N}$, $(N \geqslant n_0) \Rightarrow \alpha_N \leqslant \dfrac{3}{2}$

Ainsi, pour $n \geqslant N, 0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{3}{2} \times \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$ et la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_k} \text{ converge } \Longleftrightarrow = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u_k}\right) \text{ converge}}$$

(f) L'expression de q_n établie à la question 1a donne $\ln\left(\dfrac{1}{q_n}\right) = \ln\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+u_k}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{u_k}\right)$

Or la série de terme général $\ln\left(1+\frac{b}{u_k}\right)$ est de même nature que $\sum \frac{b}{u_k}$ d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\ln\left(\frac{1}{q_n}\right)\right)_n \text{ et la série } \sum \frac{1}{u_n} \text{ sont de même nature}}$$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \ell \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $\left(\ln\left(\frac{1}{q_n}\right)\right)_n$ converge si et seulement si $\ell \neq 0$, autrement dit, la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire est nulle si $\ell = 0$ c'est à dire si $\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.

2. (a) $q_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{b+u_k} = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{1+a^k}$ et $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{b} \times \left(\frac{1}{a}\right)^n$ donc la suite (u) est géométrique de raison $\frac{1}{a} \in]0,1[$.

La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge. Donc $\ell \neq 0$ et la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire n'est pas nulle.

(b)
$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{a^k} &= \frac{1}{a^n} \times \frac{\left(1-\left(\frac{1}{a}\right)^p\right)}{1-\frac{1}{a}} \quad \text{(somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)}\\ &< \frac{1}{a^n} \times \frac{1}{1-\frac{1}{a}} \quad \text{car } 1-\left(\tfrac{1}{a}\right)^p < 1\\ &< \frac{1}{a^{n-1}(a-1)}\end{aligned}$$

(c) On étudie les variations des fonctions $f : x \mapsto e^x - (1+x)$ et $g : x \mapsto e^x - (1+2x)$ sur $[0,1]$:
Elles sont dérivables, $\forall x \in [0,1],\ f((x) = e^x - 1 \geqslant 0$ et $\forall x \in [0,1],\ g((x) = e^x - 2$
f est croissante sur $[0,1]$, $f(0) = 0$ donc f est positive sur $[0,1]$ c'est à dire $\forall x \in [0,1],\ e^x \geqslant 1+x$
g est décroissante sur $[0, \ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2, 1]$ donc admet un minimum en $\ln 2$.
D'autre part $g(0) = 0$ et $g(1) = e - 3 < 0$; ainsi $\forall x \in [0,1],\ g(x) \leqslant 0$; finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ 1+x \leqslant e^x \leqslant 1+2x}$$

On a vu question 2a, l'expression de q_n donc

$$\frac{q_n}{q_{n+p}} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{1+a^k}}{\prod\limits_{k=0}^{n+p-1} \frac{a^k}{1+a^k}} = \prod_{k=n}^{n+p-1} \frac{1+a^k}{a^k} \text{ et } \ln\left(\frac{q_n}{q_{n+p}}\right) = \sum_{k=n}^{n+p-1} \ln\left(1+\frac{1}{a^k}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{a^k}$$

D'après le résultat de la question 2b, $\sum\limits_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{a^k} \leqslant \frac{1}{a^{n-1}(a-1)}$, de plus (q) est décroissante donc $\frac{q_n}{q_{n+p}} \geqslant 1$

Par conséquent, en composant par exp qui est croissante, on a bien :

$$\boxed{1 \leqslant \frac{q_n}{q_{n+p}} \leqslant \exp\left(\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}\right)}$$

On fixe alors n et on passe à la limite lorsque $p \to +\infty$: $1 \leqslant \frac{q_n}{\ell} \leqslant \exp\left(\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}\right)$ puis $0 \leqslant \frac{q_n - \ell}{\ell} \leqslant \exp\left(\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}\right) - 1 \leqslant 2 \times \frac{1}{a^{n-1}(a-1)}$ d'après l'encadrement obtenu en début de question. En conclusion :

$$\boxed{0 \leqslant q_n - \ell \leqslant \frac{1}{a^{n-1}(a-1)}}$$

(d) Pour $a = 2$, l'encadrement précédent donne $q_n - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \ell \leqslant q_n$ donc si $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-6}$, on obtient un encadrement de q_n à 10^{-6} près.

$\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-6} \iff -\ln\left(2^{n-1}\right) \leqslant \ln\left(10^{-6}\right) \iff n \geqslant 1 + \frac{6 \ln 10}{\ln 2} \simeq 20,9$ En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 21,\ q_n \text{ est une valeur approchée de } \ell \text{ à } 10^{-6} \text{ près ; donc } \ell \simeq q_{21} \simeq 0,209711}$$

Exercice n°3

```
import random
#******************************
def LANCER_DE():
    R=1+int(6*random.random())
    return R
#******************************
def SOMME(n):
    S=0
    for k in range(n):
        S+=LANCER_DE()
    return S
#******************************
def CRAPS():
    S=SOMME(2)
    L=1
    if S==7 or S==11:
        B=True
    elif S==2 or S==3 or S==12:
        B=False
    else:
        T=0
        while T!=7 and T!=S:
            L+=1
            T=SOMME(2)
            if T==S:
                B=True
            elif T==7:
                B=False
    return B,L
#******************************
def Simulation(Nb):
    B,L,Var=0,0,0
    for k in range(Nb):
        [b,l]=CRAPS()
        B=B+b;L=L+l;Var+=L**2
    FREQ,MOY=B/Nb,L/Nb;VAR=Var/Nb-MOY**2
    return FREQ,MOY,VAR
#******************************
[FREQ,MOY,VAR]=Simulation(1000000)
print("L'estimation ponctuelle de p vaut :",FREQ)
EcarType95=1.96*((FREQ*(1-FREQ))/1000000)**(1/2)
EcarType99=2.5758*((FREQ*(1-FREQ))/1000000)**(1/2)
print ("L'intervalle de confiance de p à 95% vaut : ")
print("[",FREQ-EcarType95," , ",FREQ+EcarType95,"]")
print ("L'intervalle de confiance de p à 99% vaut : ")
print("[",FREQ-EcarType99," , ",FREQ+EcarType99,"]")
```