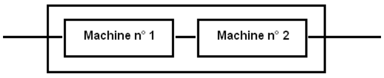
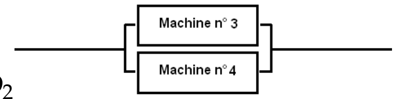
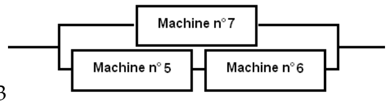
Correction du DM N°14
Exercice 1



$\mathcal{D}_1$



$\mathcal{D}_2$



$\mathcal{D}_3$

Résumons cette correction à l'essentiel

- $Y_1 =$
- $Y_2 =$
- $Y_3 =$

Toutes ces variables aléatoires sont à valeurs positives.
Soit t un réel positif

$$\begin{aligned}
[Y_1 > t] &= \\
[Y_2 \leq t] &= \\
[Y_3 \leq t] &=
\end{aligned}$$

Or

- Toutes les machines sont en état de marche à l'instant $t = 0$.
- La probabilité pour chaque machine de n'avoir subi aucune panne entre les instants 0 et t vaut $q_t = \exp(-t)$.
- L'état de chaque machine est indépendant de celui des autres

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y_1 > t) &= \\
\mathrm{P}(Y_2 \leq t) &= \\
\mathrm{P}(Y_3 \leq t) &=
\end{aligned}$$

Les fonctions de répartition des variables aléatoires $Y_1,\ Y_2,\ Y_3$ sont donc $F_1,\ F_2,\ F_3$ définies par

$$\boxed{\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\quad F_1(t) &= \begin{cases} \\ \end{cases} \\
\forall t \in \mathbb{R},\quad F_2(t) &= \begin{cases} \\ \end{cases} \\
\forall t \in \mathbb{R},\quad F_3(t) &= \begin{cases} \\ \end{cases}
\end{aligned}}$$

- Ces fonctions de répartition sont de ______ sur les ouverts
- D'autre part ______ pour $k = 1, 2, 3$

$$\boxed{\text{Les fonctions } F_1,\ F_2,\ F_3 \text{ sont donc}}$$

Le théorème de caractérisation des variables à densité permet de conclure

$$\boxed{\begin{array}{c}
Y_1,\ Y_2,\ Y_3 \text{ sont donc des variables de densités respectives } f_1,\ f_2,\ f_3 \text{ obtenues par dérivation} \\
\forall t \in \mathbb{R},\quad f_1(t) = \begin{cases} \\ \end{cases} \\
\forall t \in \mathbb{R},\quad f_2(t) = \begin{cases} \\ \end{cases} \\
\forall t \in \mathbb{R},\quad f_3(t) = \begin{cases} \\ \end{cases}
\end{array}}$$

Les espérances des variables $Y_1,\ Y_2,\ Y_3$ valent dont respectivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_1) &= \qquad\qquad = \qquad = \\
\mathrm{E}(Y_2) &= \qquad\qquad = \qquad = \\
\mathrm{E}(Y_3) &= \qquad\qquad = \qquad =
\end{aligned}$$

Les espérances des variables Y_1^2, Y_2^2, Y_3^2 valent dont respectivement :

$$\mathrm{E}\left(Y_1^2\right) = \qquad = \qquad =$$
$$\mathrm{E}\left(Y_2^2\right) = \qquad = \qquad =$$
$$\mathrm{E}\left(Y_3^2\right) = \qquad = \qquad =$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\begin{array}{lcll} \mathrm{E}(Y_1) = & & \mathrm{V}(Y_1) = & = \\ \mathrm{E}(Y_2) = & \text{et} & \mathrm{V}(Y_2) = & = \\ \mathrm{E}(Y_3) = & & \mathrm{V}(Y_3) = & = \end{array}}$$

<u>Analyse de la simulation proposée</u> :

```
1  from numpy import *
2  from random import *
3  #**********************************************
4  def simulation(Lambda):
5      X,Y=[0]*8,[0]*4
6      for i in range(1,8):
7          X[i]=-log(random())/Lambda
8      if X[1]<=X[2]:
9          Y[1]=X[1]
10     else:
11         Y[1]=X[2]
12     if X[3]<=X[4]:
13         Y[2]=X[4]
14     else:
15         Y[2]=X[3]
16     if X[5]<=X[6]:
17         if X[5]<=X[7]:
18             Y[3]=X[7]
19         else:
20             Y[3]=X[5]
21     else:
22         if X[6]<=X[7]:
23             Y[3]=X[7]
24         else:
25             Y[3]=X[6]
26     return X[1:8],Y[1:4]
27 #**********************************************
28 def Stat(N,Lambda):
29     S=array([0,0,0])
30     for i in range(N):
31         [X,Y]=simulation(Lambda)
32         S=S+Y
33     return S/N
34 #**********************************************
35 S=Stat(10000,1)
36 print('S='+str(S))
```

- L'instruction n°3 s'écrit mathématiquement $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(\text{random})$ où random est distribuée selon une Loi uniforme sur $]0,1[$.
  - <u>Univers Image</u> :
    random prend ses valeurs dans ; $\ln(\text{random})$ est : X est
    .
    $$X(\Omega) \subset$$
  - Pour x un réel strictement positif, $[X \leq x] \quad =$
    Or la probabilité de l'événement $[\text{random} \leq t]$ vaut
    donc $\mathrm{P}(X \leq x) = \qquad =$
  - Pour $x < 0$, $[X \leq x]$

Conclusion :

La fonction de répartition de la v.a X_k construite à l'instruction 3 est F définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \Big\{$ On reconnait la loi ....

- Les lignes .... permettent de calculer les durées de vie des trois dispositifs.
  - Les lignes.........................permettent de calculer $Y_1 = \min(\qquad)$
  - Les lignes.........................permettent de calculer $Y_2 = \max(\qquad)$
  - Les lignes.........................permettent de calculer $Y_3 = \max(\quad, \min(\qquad))$
- Lors de l'exécution de l'instruction Y = Stat(100000,1), nous avons enregistré la réponse suivante : Y =[0.4995 1.5095 1.1667] dont les trois termes sont effectivement proches de .

Exercice 2

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \int_0^x t\, f(t)\; \mathrm{d}t$$

1. Intégration par partie

   La fonction $F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\; \mathrm{d}t$ est
   Or par hypothèse, f est $\mathbb{R}^+$

F est donc $\mathbb{R}^+$ et $\forall x > 0, \quad F'(x) =$

   Posons : $\forall t > 0,$ et
   alors : $\forall t > 0,$ et
   Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions u et v sont donc de classe C^1, ce qui légitime l'intégration par partie suivante

   Soit x un réel quelconque strictement positif

   $$\int_0^x u(t)\; v'(t)\; \mathrm{d}t =$$

   soit

   $$\int_0^x t\, f(t)\; \mathrm{d}t =$$

   Conclusion :

   $$\boxed{\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \int_0^x \Big[1 - F(t)\Big]\; \mathrm{d}t - x\,\Big[1 - F(x)\Big]} \qquad (1)$$

2. Le cas où $E(X)$ existe

   On suppose ici que $E(X)$ existe, autrement dit que : $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\; \mathrm{d}t$ est convergente

   (a) Première inégalité

   Soit x un réel positif quelconque
   - $\int_x^{+\infty} f(t)\; \mathrm{d}t$ est convergente $\left(\int_x^{+\infty} f(t)\; \mathrm{d}t = P(X > x)\right)$.
   - Par hypothèse, $\int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)\; \mathrm{d}t$ est convergente : $\int_x^{+\infty} t \times f(t)\; \mathrm{d}t$ l'est également.

   $$\forall t \in [x, +\infty[, \quad 0 \leq x \leq t \quad \text{d'où} \quad 0 \leq \qquad \leq$$

   Intégrons membre à membre cette inégalité sur $[x, +\infty[$

   $$0 \leq \qquad\qquad \leq$$

Or

$$\int_x^{+\infty} \qquad \mathrm{d}t = x \qquad \text{et} \qquad \int_x^{+\infty} \qquad \mathrm{d}t = \underbrace{\qquad\qquad}_{E(X)} - \underbrace{\qquad\qquad}_{\varphi(x)}$$

Nous pouvons donc conclure

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 0 \le x \int_x^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \le E(X) - \varphi(x)} \tag{2}$$

(b) Autre expression de $E(X)$

Par hypothèse, $\qquad\qquad$ est convergente, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = \qquad$.

Ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) =$$

Le théorème des gendarmes et l'inégalité obtenue en (2) conduisent à

$$\lim_{x \to +\infty} \qquad\qquad = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{x \to +\infty} \qquad\qquad = 0$$

L'égalité obtenue en (1) s'écrit : $\forall x > 0, \qquad\qquad = \qquad\qquad + \varphi(x)$

Or $\qquad \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\qquad\qquad \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} E(X)$

de sorte que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \left[1 - F(t)\right]\ \mathrm{d}t =$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Si } E(X) \text{ existe, alors : } \quad E(X) = \int_0^{+\infty} \left[1 - F(t)\right]\ \mathrm{d}t}$$

3. Réciproque

On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left[1 - F(t)\right]\ \mathrm{d}t$ est convergente.

(a) Variations de φ sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \int_0^x t\, f(t)\ \mathrm{d}t$$

En tant qu'intégrale fonction de sa borne supérieure, φ est dérivable en

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi \text{ est donc dérivable sur } \qquad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \qquad \ge 0 \\ \varphi \text{ est donc } \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \end{array}}$$

(b) Existence de $E(X)$.

L'égalité obtenue en (1) s'écrit : $\forall x > 0, \quad \varphi(x) =$

Compte tenu de la positivité de $\qquad\qquad$ et de la convergence supposée de

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) \le \int_0^x \qquad \mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} \qquad \mathrm{d}t$$

Ainsi φ est une fonction croissante et majorée sur $[0, +\infty[$

Le théorème de la convergence monotone pour les fonctions permet de conclure

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi \text{ admet une limite } L \text{ finie en } +\infty \\ \varphi(x) = \int_{-\infty}^x t\, f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x t\, f(t)\ \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L \end{array}}$$

L'intégrale $\qquad\qquad$ est donc convergente

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \int_0^{+\infty} \left[1 - F(t)\right]\ \mathrm{d}t \text{ est convergente} \\ \text{alors la variable aléatoire } X \text{ admet } \qquad\qquad . \end{array}}$$

4. Bilan
Nous venons de prouver l'équivalence :

$$\text{existe} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \qquad \mathrm{d}t \text{ convergente}$$

Nous avons montré

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \qquad \mathrm{d}t \text{ convergente} \Rightarrow E(X) = \int_0^{+\infty} \qquad \mathrm{d}t}$$