Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°14 - A rendre le lundi 3 mars 2014

« Loi de Khi-Deux - Fonctions de Survie »

PREMIER PROBLEME - Lois de Khi-deux

Dans ce premier problème, vous admettrez le résultat ($\mathcal{R}$) suivant :

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g, la variable aléatoire $X+Y$ admet alors pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t\ .$$

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite.

1. Rappeler la formule explicite de la densité φ de la Loi Normale Centrée Réduite.

2. Démontrer que X_1^2 est une variable aléatoire à densité dont une densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0.$$

3. Loi de $X_1^2 + X_2^2$

(a) Soit $x > 0$ fixé. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{t}{x}}$, montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t$ et donner sa valeur.

(b) Déterminer à l'aide de ($\mathcal{R}$) la loi de $X_1^2 + X_2^2$.

4. Loi de $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_r^2$.

(a) Soit r un entier naturel supérieur ou égal à deux.

Soit $x > 0$. À l'aide du changement de variable $\theta = \arcsin\sqrt{1 - \dfrac{t}{x}}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t$ converge et que l'on a l'égalité

$$\int_0^x \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t = 2x^{\frac{r+1}{2}-1} W_{r-1}$$

où pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, W_n désigne l'intégrale : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n \mathrm{d}\theta$.

(b) Soit r un entier naturel non nul.
Prouver, à l'aide de $(\mathcal{R})$ et par récurrence sur r que que la variable $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_r^2$ admet une densité f_r définie par :

$$f_r(x) = C_r\, x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \ \text{ si } x \geq 0, \quad \text{et} \quad f_r(x) = 0 \ \text{ si } x < 0,$$

où C_r est une constante que l'on déterminera dans la suite du problème.

5. Calcul de C_1 et C_2.

(a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$.

(b) En déduire la constante C_1 et vérifier ce résultat avec la question 2.

(c) Déterminer la valeur de la constante C_2.

6. Calcul des C_r.
Soit r un nombre entier non nul.

(a) Soient $0 < \varepsilon < t$. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^t x^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^t x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x$.
En déduire par récurrence l'existence de l'intégrale $J_r := \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x$ et exprimer J_{r+2} en fonction de J_r.

(b) Donner les expressions de J_{2k} en fonction de l'entier $k \in \mathbf{N}^*$ et de J_{2k+1} en fonction de $k \in \mathbf{N}$.

(c) Prouver

- pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $C_{2k} = \dfrac{1}{(k-1)!\, 2^k}$
- pour tout $k \in \mathbf{N}$, $C_{2k+1} = \dfrac{2^k k!}{\sqrt{2\pi}\,(2k)!}$

SECOND PROBLEME - Fonctions de survie

Préliminaires

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$. On note F la fonction de répartition de X.
On pose pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(x) = \int_0^x t f(t) dt$$

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \Big[1 - F(t)\Big]\, dt - x\Big[1 - F(x)\Big]$.

2. On suppose dans cette question que X admet une espérance mathématique, que l'on notera $E(X)$.

(a) Établir, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, l'inégalité : $0 \leq x \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt \leq E(X) - \varphi(x)$.

(b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \left[1 - F(x)\right] = 0$. Prouver alors $E(X) = \int_0^{+\infty} \left[1 - F(t)\right] dt$.

3. On suppose dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big[1 - F(t)\Big]\, dt$ est convergente.

(a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. En désignant par $\varphi^{'}$ la dérivée de φ, calculer pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $\varphi^{'}(x)$, et en déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Justifier le fait que φ admet une limite en $+\infty$. En déduire que X admet une espérance mathématique, que l'on notera $E(X)$.

4. Dresser en une seule phrase le bilan des questions 2 et 3.

Partie 1

On désigne par fonction de survie de la variable X, la fonction S définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x > 0\,,\; S(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$$

1. Soit x un réel positif tel que $S(x) > 0$.

(a) Déterminer la fonction de répartition $F_X^{[X>x]}$ de X conditionnée par l'événement $[X > x]$. (En d'autres termes, déterminer pour tout t réel $P\left(X \leq t \big/ X > x\right)$)

(b) En déduire une densité $f_X^{[X>x]}$ de la variable X conditionnée par l'événement $[X > x]$.

(c) On désigne par $E_{X>x}\,(X - x)$ l'espérance de la variable $X - x$ conditionnée par l'événement $[X > x]$. Prouver que

$$E_{X>x}\,(X - x) = \frac{1}{S(x)} \int_x^{+\infty} S(t)dt$$

2. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, strictement positive et dérivable.

(a) Montrer que les fonctions S définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $g(x) = \frac{1}{S(x)} \int_x^{+\infty} S(t)dt$, vérifient l'équation différentielle :

$$S^{'}(x)g(x) = -S(x) \times \Big(1 + g^{'}(x)\Big)$$

(b) Déterminer, quand cela est possible, les fonctions de survie de la variable X dans chacune des situations suivantes :

- $\forall x > 0\,,\; E_{X>x}\,(X - x) = a$
- $\forall x > 0\,,\; E_{X>x}\,(X - x) = a + x$
- $\forall x > 0\,,\; E_{X>x}\,(X - x) = \frac{1}{a+x}$

Partie 2

Dans toute la suite du problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1, et l'on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On définit la variable S_n définie par :

$$S_n = \sup\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$$

$$\text{Ainsi : } \forall \omega \in \Omega\,,\ S_n(\omega) = \max\left(X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)\right)$$

1. (a) Déterminer la fonction de répartition F_n de S_n.
   (b) En déduire que S_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de S_n.

2. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left[1 - F_n(t)\right] dt$ est convergente (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).
   (b) En déduire que S_n admet une espérance, notée $E\left(S_n\right)$.

3. **Calcul de l'espérance de** S_n

   (a) Montrer que $E\left(S_n\right) = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}$.

   (b) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-(1-x)^n}{x} \mathrm{d}x$ et établir la relation :

$$E\left(S_n\right) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x} dx$$

   (c) Montrer que $E\left(S_n\right) = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

4. **Étude asymptotique de l'espérance de** S_n.

   (a) Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\ln(n) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
   (b) En déduire un équivalent de $E\left(S_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
   (c) Montrer que la série de terme général $u_k = \frac{1}{k} + \ln(k) - \ln(k+1)$, pour k appartenant à $\mathbb{N}^*$, est convergente.
   (d) En déduire que la suite de terme général $E\left(S_n\right) - \frac{1}{\lambda}\ln(n)$, pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, est convergente.