Correction du devoir n°14

Premier problème

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}$

2. X_1^2 est une variable à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et $\forall x \geqslant 0, P(X_1^2 \leqslant x) = P(-x \leqslant X_1 \leqslant x)$.
Comme X_1 est à densité, on a $P(-\sqrt{x} \leqslant X_1 \leqslant \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < X_1 \leqslant \sqrt{x}) = F_{X_1}(\sqrt{x}) - F_{X_1}(-\sqrt{x})$, donc $P(X_1^2 \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\big(\varphi(\sqrt{x}) + \varphi(-\sqrt{x})\big) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi\,x}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

3. (a) Par changement de variable $v = x - t$, on constate que pour $0 < b < x$, on a, sous réserve de convergence $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = \int_{x-b}^{x} \frac{1}{\sqrt{x-v}\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v$, donc la convergence en 0 équivaut à celle en x.
Soit $0 < a < b < x$, on pose $u = \sqrt{\frac{t}{x}}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{\frac{a}{x}}}^{\sqrt{\frac{b}{x}}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = 2\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)\right)$
$\displaystyle\lim_{\substack{a \to 0\\ b \to x}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = 2\Big(\arcsin(1) - \arcsin(0)\Big) = \pi.$

   (b) X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes, $X_1^2 + X_2^2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc une densité de $X_1^2 + X_2^2$ est donnée par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 0$ si $x < 0$ et pour $x \geqslant 0,\ h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$; or $\forall t < 0,\ f(t) = 0$ donc $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$; de même $f(x-t) = 0$ pour $t > x$ donc finalement $h(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,(x-t)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-t)}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2\,\pi}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2}$ d'après le calcul précédent.

$$\boxed{X_1^2 + X_2^2 \hookrightarrow \mathscr{E}(\tfrac{1}{2})}$$

4. (a) L'intégrale $= \displaystyle\int_0^x \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t$ est impropre en x ; soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < x$, on a :
$\theta = \arcsin\sqrt{1 - \dfrac{t}{x}}$ donc $\sin^2\theta = 1 - \dfrac{t}{x}$ et $2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}t$, $t = x\cos^2\theta$, $\sqrt{x-t} = \sqrt{x}\sin\theta$,
donc $\displaystyle\int_0^a \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = 2\,x^{\frac{r-1}{2}} \int_{\arcsin(\sqrt{1-\frac{a}{x}})}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{r-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$
$\displaystyle\lim_{a \to x} \int_0^a \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = \lim_{a \to x} 2\,x^{\frac{r-1}{2}} \int_{\arcsin(\sqrt{1-\frac{a}{x}})}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{r-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\,x^{\frac{r-1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{r-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\,x^{\frac{r-1}{2}}\,W_{r-1}.$

   (b) Initialisation : $r = 2$, une densité de $X_1^2 + X_2^2$ est donnée par $f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2}$ pour $x \geqslant 0$ et $f_2(x) = 0$ pour $x < 0$, donc $C_2 = \dfrac{1}{2}$.
Soit $r \geqslant 2$, on suppose qu'une densité f_r de $X_1^2 + \cdots + X_r^2$ est donnée par $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_r(x) = C_r\,x^{\frac{r}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ et $f_r(x) = 0$ sinon. Les variables $X_1^2 + \cdots + X_r^2$ et X_{r+1}^2 sont indépendantes, donc une densité est donnée par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{r+1}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$
f_r et f étant nulles sur $\mathbb{R}^-$, on a $\forall x < 0,\ f_{r+1}(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_{r+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_r(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$.
$\displaystyle\int_0^x f_r(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x C_r\,t^{\frac{r}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \times \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-t)}{2}}}{\sqrt{2\,\pi\,(x-t)}}\mathrm{d}t = \frac{C_r\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}\int_0^x \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,C_r\,W_{r-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,x^{\frac{r+1}{2}-1}$

5. (a) et (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\,\pi}$, donc $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}$; or f_1 est la question f définie à la question 2, ce qui est en accord avec l'expression de f.
   (c) C_2 a déjà été calculé et vaut $\dfrac{1}{2}$.

6. (a) On pose $v(x) = x^{\frac{r}{2}}$ donc $v'(x) = \frac{r}{2}x^{\frac{r}{2}-1}$; $u'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ et $u(x) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. On a alors : $\displaystyle\int_\varepsilon^t x^{\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[-2\,x^{\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_\varepsilon^t + 2\times\frac{r}{2}\int_\varepsilon^t x^{\frac{r}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$; $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} -2\,\varepsilon^{\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}} = 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -2\,t^{\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 0$ donc on montre par récurrence sur r que $\forall r \geqslant 1, J_r$ converge et $J_{r+2} = r\,J_r$:

Initialisation : soit $k=1$, $J_1 = \sqrt{2\,\pi}$ et $J_2 = 2$

Soit $k \geqslant 1$; on suppose que J_{2k} et J_{2k-1} convergent.

D'après le calcul précédent, $\displaystyle J_{2k+1} = \lim_{\substack{t\,\to\,+\infty\\ \varepsilon\,\to\,0}} (2\,k-1)\int_\varepsilon^t x^{\frac{2k-1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = (2\,k-1)\,J_{2k-1}$

De même, $\displaystyle J_{2k+2} = \lim_{\substack{t\,\to\,+\infty\\ \varepsilon\,\to\,0}} 2\,k\int_\varepsilon^t x^{\frac{2k}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\,k\,J_{2k}$

Donc J_{2k+2} et J_{2k+1} convergent et la récurrence est établie.

(b) On montre par récurrence que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\displaystyle J_{2k+1} = (2\,k-1)\,(2\,k-3)\times\cdots\times 3\times J_1 = \frac{(2\,k)!}{2^k\,k!}\sqrt{2\,\pi}$

De même, $\forall k\in\mathbb{N}$, $J_{2k} = (2\,k-2)\,(2\,k-4)\times\cdots\times 2\times J_2 = 2^{k-1}\,(k-1)!\times 2 = 2^k\,(k-1)!$

(c) f_r est une densité de probabilité donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_r(x)\,\mathrm{d}x = 1 = C_r\times J_r$; on obtient ainsi les valeurs annoncées de C_{2k} et C_{2k+1} .

Deuxième problème

Préliminaires

1. $\displaystyle\varphi(x) = \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = [t\,F(t)]_0^x - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = x\,F(x) - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$; or $\displaystyle\int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$ donc

$$\varphi(x) = x\,F(x) - x + \int_0^x 1\,\mathrm{d}t - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = -x\big(1-F(x)\big) + \int_0^x \big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

2. (a) $\displaystyle E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ puisque f est nulle sur $]-\infty,0[$.

$\displaystyle E(x)-\varphi(x) = \int_x^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{+\infty} x\,f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, car $\forall t\in[x,+\infty[$, $t\geqslant x$ donc $t\,f(t)\geqslant x\,f(t)$.

(b) On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \int_0^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = E(X)$ puisque $E(X)$ existe.

$\displaystyle E(x)-\varphi(x) = x\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = x\,[F(t)]_x^{+\infty} = x\big(1-F(x)\big)$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\big(1-F(x)\big) = \lim_{x\to+\infty} E(x)-\varphi(x) = 0$.

En reprenant l'expression de φ : $\displaystyle E(x) = \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x\Big(1-t\,F(t)\Big)\mathrm{d}t - \lim_{x\to+\infty} x\big(1-F(x)\big) = \int_0^{+\infty}\Big(1-t\,F(t)\Big)\mathrm{d}t - 0$

3. (a) $t\mapsto t\,f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $\displaystyle x\mapsto\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et a pour dérivée $x\mapsto x\,f(x)$.

Donc φ est dérivable, et même de classe $\mathscr{C}^1$ et $\forall x\geqslant 0$, $\varphi'(x) = x\,f(x)$.

(b) φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x\geqslant 0$, $\displaystyle\varphi(x)\leqslant\int_0^x\Big(1-t\,F(t)\Big)\mathrm{d}t$, puisque $1-F$ est à valeurs positives.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(1-t\,F(t)\Big)\mathrm{d}t$ converge, φ est majorée sur $\mathbb{R}^+$. Étant croissante et majorée, φ admet une limite finie en $+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \int_0^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = E(X)$.

4. La question 2 montre que si $E(X)$ existe, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; la question 3 établit la réciproque, donc $E(X)$ existe $\iff \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Partie 1

1. (a) $P\Big(X \leqslant t \,/\, X > x\Big) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x \\ \frac{P(x \leqslant X \leqslant t)}{P(X \geqslant t)} & \text{sinon} \end{cases}$ donc si $t \geqslant x$, $F_X^{[X>x]}(t) = \dfrac{S(x) - S(t)}{S(x)}$ et $F_X^{[X>x]}(t) = 0$ sinon.

   (b) F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc S aussi. Ainsi $f_X^{[X>x]}(t) = -\dfrac{S'(t)}{S(x)} = \dfrac{f(t)}{S(x)}$ si $t \geqslant x$ et 0 sinon.

   (c) D'après les préliminaires, si $E_{X>x}(X-x)$ existe, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(1-F_X^{[X>x]}(t)\Big)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $E_{X>x}(X-x)$.
   $$E_{X>x}(X-x) = \int_0^{+\infty} \Big(1 - F_X^{[X>x]}(t)\Big)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_x^{+\infty} \frac{S(t)}{S(x)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{S(x)} \int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$$

2. (a) Soit $g(x) = \dfrac{1}{S(x)} \displaystyle\int_x^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$; g s'exprime en fonction de S et d'une primitive de S, donc g est dérivable, et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
   $\forall x \geqslant 0,\ g'(x) = -\dfrac{S'(x)}{S(x)} \displaystyle\int_x^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t + \dfrac{1}{S(x)} \times (-S(x)) = -1 - \dfrac{S'(x)}{S(x)}\,g(x)$, g est donc bien solution de l'équation différentielle annoncée.

   (b)
   - $E_{X>x}(X-x) = a$ donne $\forall x > 0,\ S'(x)\,a = -(1+0)S(x)$ donc $S(x) = K\mathrm{e}^{-x/a}$; à condition que a soit non nul. Comme $F(x) = 1 - K\,\mathrm{e}^{-x/a}$ avec $F(0) = 0$, on en déduit $K = 1$.
   $$\boxed{S(x) = \mathrm{e}^{-x/a}}$$
   - $E_{X>x}(X-x) = a + x$ donne $\forall x > 0,\ S'(x)\,(a+x) = -2\,S(x)$ donc il existe une constante K telle que $\forall x > 0,\ S(x) = \dfrac{K}{(a+x)^2}$. À nouveau, $F(x) = 1 - \frac{K}{(a+x)^2}$ donc $K = a^2$ puisque $F(0) = 0$.
   $$\boxed{S(x) = \frac{a^2}{(x+a)^2}}$$
   - $E_{X>x}(X-x) = \dfrac{1}{a+x}$ donne $\forall x > 0,\ \dfrac{S'(x)}{a+x} = -\left(1 - \dfrac{1}{(a+x)^2}\right) S(x)$, donc S vérifie :
   $S'(x) + \left(a + x + \dfrac{1}{a+x}\right) S(x) = 0$ et il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0,\ S(x) = K\,(a+x)\,\mathrm{e}^{-ax+\frac{x^2}{2}}$.
   $F(0) = 0$ entraine $K = \dfrac{1}{a}$.
   $$\boxed{S(x) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\,\mathrm{e}^{-ax+\frac{x^2}{2}}}$$

Partie 2

1. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$, $[S_n \leqslant t] = [X_1 \leqslant t] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant t]$, donc $F_n(t) = P\Big([X_1 \leqslant t] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant t]\Big) = F_1(t)^n$
   Donc $F_n(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^n$ si $t \geqslant 0$ et 0 sinon.

   (b) F_n est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en 0, donc S_n est une variable à densité et par exemple, $f_n(t) = n\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n-1}$ si $t \geqslant 0$ et 0 sinon.

2. (a) $1 - F_n(t) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^n = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\,\mathrm{e}^{-\lambda k t}$ (formule du binôme)
   $$= -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\,\mathrm{e}^{-\lambda k t}$$

(b) Chacune des intégrales $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc $\int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))\,\mathrm{d}t$ converge, et d'après les préliminaires, S_n admet une espérance.

3. (a) $E(S_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k t}\mathrm{d}t = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \times \frac{1}{\lambda\, k} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k}(-1)^{k-1}}{k}$

(b) Cette intégrale est impropre en 0, mais $1-(1-x)^n \underset{x\to 0}{\sim} n\,x$, donc elle est faussement impropre, et par conséquent, convergente.

$1-(1-x)^n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k x^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{k-1} x^k$ donc

$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{k-1} \int_0^1 x^{k-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

Ainsi, $E(S_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,\mathrm{d}x$

(c) $E(S_{n+1}) - E(S_n) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \left(\frac{1-(1-x)^{n+1}}{x} - \frac{1-(1-x)^n}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)\,\lambda}$, donc

$$\boxed{E(S_n = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$ donc :

$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x$, soit $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$

En sommant pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on obtient $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1$ donc $\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$

(b) En divisant l'encadrement précédent par $\ln n$, qui est > 0 pour $n \geqslant 2$, on obtient : $1 \leqslant \frac{\lambda\, E(S_n)}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda\, E(S_n)}{\ln n} = 1$ donc $\boxed{E(S_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\lambda}}$

(c) Calculons la somme partielle d'ordre $n-1$ de cette série : $U_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \frac{1}{n}$

D'après la question 4a, on a donc $-\frac{1}{n} \leqslant U_{n-1} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$. $\sum u_n$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée (par 1) donc c'est une série convergente.

(d) $E(S_n) - \frac{\ln n}{\lambda} = \frac{U_n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, $\left(\frac{Un}{\lambda}\right)_{n\geqslant 1}$ converge ; donc $\left(E(S_n) - \frac{\ln n}{\lambda}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.