Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°13 - A rendre le mercredi 12 février 2014

« Variables aléatoires à densité »

On « rappelle » les éléments de cours suivants :

1. Soit f une fonction réelle de variable réelle. On dit que « ***f*** **est une densité de probabilité** » si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes :

   • f est définie sur $\mathbb{R}$. • f est une fonction positive. • $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

2. Si X est une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé (Ω, A, P), on dit que « ***X*** **admet pour densité** ***f*** » si et seulement si sa fonction de répartition F est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où} \quad f \text{ est une fonction positive définie sur } \mathbb{R}$$

   « ***f*** **est alors une densité de probabilité** ».

3. Pour toute variable aléatoire X de densité f_X, les espérances de X et X^2 sont notées respectivement $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}(X^2)$ et définies par :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

   sous réserve de convergence de chacune de ces intégrales.
   La variance de X vaut alors : $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$

4. On dit qu'une variable aléatoire X est distribuée selon la Loi Uniforme sur un intervalle borné I si et seulement si elle admet une densité qui soit constante sur cet intervalle I et nulle en dehors de cet intervalle. On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathrm{I})$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \text{ si } x \in \left]-1, 1\right[\quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Déterminer λ pour que f soit une densité de probabilité.

   Dans la suite du problème, on considère que cette condition est vérifiée et on note X une variable aléatoire réelle de densité f.

2. Déterminer F la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unités 4 cm.

3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

4. Montrer que X admet une variance et la calculer en utilisant le changement de variable : $x = \cos u$ que l'on justifiera de façon précise.

5. Déterminer et reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y = \arcsin X$. Donner son espérance et sa variance.

6. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = |X|$. Calculer son espérance et sa variance.

7. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon 1. Un point A est donné sur ce cercle $(\mathcal{C})$.
   On choisit au hasard un point B sur $(\mathcal{C})$ en supposant que l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\right)$ est une variable aléatoire de loi Uniforme sur $[0,\ 2\pi]$. On note C le milieu de AB et L la variable aléatoire égale à la **distance** OC.
   (a) Montrer que $L = \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.
   (b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de L.