Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°1 - A remettre le lundi 16 Septembre 2013

« **La Brachistocrone** »

« On considère dans le champ de la pesanteur deux points A et B et un point matériel M se déplaçant sans frottement sur une courbe d'extrémités A et B. Pour quelle (s) courbe (s), le temps de parcours est-il minimal lorsque le point M part du point A avec une vitesse nulle ? ». Tel est le problème énoncé au XVII$^{\text{ème}}$ siècle par Jean Bernoulli.
Dans le cadre de ce problème, nous nous proposons de déterminer parmi les fonctions f suffisamment régulières sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0)=1$, $f(1)=0$ celles qui minimisent, lorsqu'elle existe, l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}}{\sqrt{(1-f(x))}}\,dx. \tag{1}$$

En effet, pour un point décrivant une trajectoire d'équation $y=f(x)$, sa vitesse de déplacement sur la courbe vaut selon les lois de la mécanique $\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}=k\left(\sqrt{1-f(x)}\right)$ où s désigne l'abscisse curviligne du point sur sa trajectoire et k une constante liée à l'accélération de la pesanteur. Or $\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,x}=\sqrt{1+(f'(x))^2}$; il en découle $\mathrm{d}\,t=\frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{k\sqrt{1-f(x)}}\,\mathrm{d}\,x$ de sorte que l'intégrale (1) est proportionnelle au temps mis par le mobile pour aller de A à B.

Notations

Nous désignerons par E l'ensemble des fonctions f à valeurs dans $]-\infty,1]$, définies et continues sur $[0,1]$, continûment dérivables sur $]0,1[$, vérifiant en outre $f(0)=1$, $f(1)=0$ et $f(]0,1])\subset\,]-\infty,1[$ pour lesquelles l'intégrale (1) est convergente. Pour tout f de E, nous poserons

$$\Phi(f)=\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}}{\sqrt{(1-f(x))}}\,dx$$

Objectifs

Ce devoir comporte deux parties A et B.
Nous admettrons que l'équation différentielle étudiée dans la partie A est une condition nécessaire pour que certaines fonctions soient solutions du problème posé par Jean Bernoulli.
Dans la partie A, nous résolvons cette équation différentielle avec conditions aux limites.
Dans la partie B, nous donnerons la valeur minimale de Φ et la seule fonction de E qui minimise Φ.

Partie A

Nous dirons qu'une fonction $f:[0,1]\to[0,1]$ satisfait aux **conditions (I)** si :

- f est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$ et vérifie $f(0)=1$, $f(1)=0$.
- Il existe un réel C, $C\geqslant\dfrac{1}{2}$ tel que f est solution sur $]0,1[$ de l'équation différentielle :

$$(1-y)\,y'^2=2C-1+y$$

1. On considère la fonction $\varphi : t \mapsto \arccos t - \sqrt{1-t^2} - 1 + t$.

a. Préciser le domaine de continuité de la fonction φ.

b. Montrer que φ est dérivable sur $]-1,1[$ et expliciter φ' sur $]-1,1[$.

c. Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}} \frac{\varphi(t)-\varphi(-1)}{t+1} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{\varphi(t)-\varphi(1)}{t-1}$$

d. En déduire le domaine de dérivabilité de la fonction φ.

e. Justifier le signe de la fonction dérivée et dresser le tableau des variations de φ.

2. L'équation $\varphi(t) = 0$

a. Prouver l'existence dans $[-1,1[$ d'un unique nombre θ tel que $\varphi(\theta) = 0$.

b. Déterminer alors l'unique entier N tel que $N - \dfrac{1}{2} \leqslant 1000\,\theta < N + \dfrac{1}{2}$.

c. En déduire l'arrondi décimal au millième près de θ.

3. Soit f une fonction satisfaisant aux conditions (I).

a. Montrer qu'une telle fonction réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[0,1]$ dont la réciproque g vérifie

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad (g'(y))^2 = \frac{1-y}{2C+y-1} \text{ et } g'(y) = \frac{y-1}{C\sqrt{1-\left(\frac{y-1+C}{C}\right)^2}}$$

b. En déduire qu'il existe un réel K tel que

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad g(y) = -C\sqrt{1-\left(\tfrac{y-1+C}{C}\right)^2} + C\arccos\tfrac{y-1+C}{C} + K$$

c. Montrer alors qu'il existe au plus une fonction f satisfaisant aux conditions (I) et que la constante C associée vérifie la condition $\frac{C-1}{C} = \theta$, où θ est le nombre définie en B-2.a. Donner l'arrondi décimal de C à 10^{-3} près.

4. Considérons la fonction γ définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall y \in [0,1]\,, \quad \gamma(y) = \frac{\arccos(\theta + y(1-\theta)) - \sqrt{1-(\theta+y(1-\theta))^2}}{1-\theta}$$

a. Montrer que γ réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[0,1]$ dérivable sur $[0,1]$.

b. Montrer que sa réciproque Λ est dérivable sur $]0,1]$ et satisfait aux conditions (I).

c. Représenter avec soin cette réciproque dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 10 cm.

5. Quelle conclusion tirez-vous des résultats obtenus aux questions 3 et 4 ?

Partie B

Soit γ la fonction définie en A-4 et Λ sa fonction réciproque.

1. Déterminer $\Phi(f_1)$ où $f_1 : x \mapsto 1 - x$.

2. a. Montrer que : $\Phi(\Lambda) = \int_0^1 \dfrac{\sqrt{1+\gamma'(y)^2}}{\sqrt{1-y}}\,dy$.

   b. En déduire à l'aide du changement de variables : $u : y \mapsto \theta + y(1-\theta)$

$$\Phi(\Lambda) = \sqrt{2}\left(\sqrt{1-\theta} + \sqrt{1+\theta}\right)$$

On peut montrer, en utilisant des arguments de convexité sur des fonctions bien choisies, que ce dernier résultat constitue pour la fonction Φ une valeur minimale atteinte pour la seule fonction Λ. Son arrondi au millième est 2,582.