Corrigé du devoir maison n^o 16

Problème I

1. (a) $\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \varphi'(x)$, $\quad \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y)\psi'(y)$ donc

   $x^2\,(1-y)\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) = y\,(1-x)^2\dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) \iff x^2\,(1-y)\,\varphi'(x) = y\,(1-x)^2\,\psi'(y)\ (\star)$

   (b) $\forall x>0,\ \varphi'(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2}\,\dfrac{y\,\psi'(y)}{1-y}$. Dans la mesure où $\varphi'(x)$ ne dépend pas de y, on peut considérer que $\dfrac{y\,\psi'(y)}{1-y}$ est contant, égal à A. On obtient alors $\varphi(x) = A\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right) + B$ où B est une constante réelle.

   En remplaçant dans $(\star)$, il vient $\psi'(y) = \dfrac{A\,(y-1)}{y}$ d'où $\psi(y) = A\,(y-\ln y) + C,\ C\in\mathbb{R}$.

   Un couple (φ,ψ) possible est par exemple :

$$\boxed{\varphi : x \mapsto 1+\frac{1}{x^2}, \quad \psi : y\mapsto y-\ln y}$$

2. (a) Notons f et g respectivement les fonctions $t\mapsto x(t+T)$ et $t\mapsto y(t+T)$, si x et y vérifient $(\mathcal{S})$ alors :
   $f'(t) = x'(t+T) = x^2(t+T)\big(1-y(t+T)\big) = f(t)\big(1-g(t)\big)$; et
   $g'(t) = y'(t+T) = y(t+T)\big(1-x(t+T)\big)^2 = g(t)\big(1-f(t)\big)^2$.
   Donc f et g vérifient également $(\mathcal{S})$.

   (b) La dérivée de la fonction $t\mapsto V\big(x(t),y(t)\big)$ est $t\mapsto x'(t)\,\dfrac{\partial V}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big) + y'(t)\,\dfrac{\partial V}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)$.

   Or $x'(t) = x^2\,(1-y)$, $\quad y'(t) = -\,y\,(1-x)^2$ et V est solution de (E), donc
   $\dfrac{\partial V}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big) + y'(t)\,\dfrac{\partial V}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big) = x^2\,(1-y)\,\dfrac{\partial V}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big) - y\,(1-x)^2\,\dfrac{\partial V}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big) = 0.$
   On en déduit que la fonction $t\mapsto V\big(x(t),y(t)\big)$ est constante.

3. $V(x,y) = x-y+\ln\left(\dfrac{y}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x}+5$

   (a) V admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de son ensemble de définition et $\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) = 1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) = -1+\dfrac{1}{y}$, de même V admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point et $\boxed{\dfrac{\partial V^2}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial V^2}{\partial y\partial x}(x,y) = 0,\quad \dfrac{\partial V^2}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x^3},\quad \dfrac{\partial V^2}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{2}{y^2}}$

   (b) Comme V admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de son ensemble de définition, elle ne peut admettre un extremum local qu'en un point critique. On résout alors le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2} = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2 = 0 \\[2ex] -1+\dfrac{1}{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x=y=1 \\ V \text{ admet un unique point critique : } (1,1) \end{array}$$

$$\boxed{V \text{ admet un extremum local en } M(x,y) \Longrightarrow x=y=1}$$

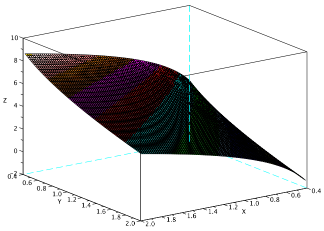
   (c) On peut poser $x = 1+h$, $y = 1+k$ avec h et k tendant vers 0, et faire un développement limité à l'ordre 2 en k et 3 en h (car on constate que les termes en h et en h^2 se simplifient) :

$$\begin{aligned} V(1+h,1+k)-V(1,1) &= (1+h)-(1+k)+\ln(1+k)-2\,\ln(1+h)-\frac{1}{1+h}+1 \\ &= h-k+\left(k-\frac{k^2}{2}+o(k^2)\right)-2\left(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)\right)-\big(1-h+h^2-h^3+o(h^3)\big)+1 \\ &= -k^2+\frac{1}{3}\,h^3+o(k^2)+o(h^3). \end{aligned}$$

   En prenant $k=0$, on obtient :
   $V(1+h,1)-V(1,1) = +\dfrac{1}{3}\,h^3+o(h^3)$ donc n'est pas de signe constant au voisinage de $(1,1)$.

$$\boxed{V \text{ n'admet pas d'extremum local en } (1,1)}$$

(d)



4. (a) X et Y sont strictement positifs sur $\mathbb{R}$ donc on peut écrire en faisant le quotient membre à membre des deus équations de $(\mathcal{S})$: $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{X'(t)}{Y'(t)} = -\left(\dfrac{1-Y(t)}{Y(t)}\right)\left(\dfrac{X(t)}{1-X(t)}\right)^2$, puis en séparant les variables :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t)\left(\frac{1-X(t)}{X(t)}\right)^2 = -Y'(t)\left(\frac{1-Y(t)}{Y(t)}\right)$$

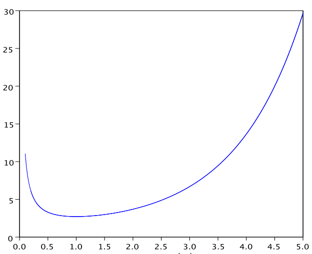
$$X'(t)\left(\frac{1}{X^2(t)} - \frac{2}{X(t)} + 1\right) = Y'(t)\left(1 - \frac{1}{Y(t)}\right)$$ d'où en intégrant :

$-\dfrac{1}{X(t)} - 2\ln\big(X(t)\big) + X(t) = Y(t) - \ln\big(Y(t)\big) + C$ (C constante réelle) et en composant par exp :

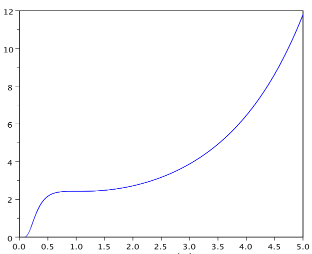
$\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{\exp\left(X(t) - \frac{1}{X(t)}\right)}{X^2(t)} = \mathrm{e}^C \dfrac{\exp\big(Y(t)\big)}{Y(t)}$; on calcule ensuite la constante en prenant $t = 0$ comme valeur particulière : $X(0) = 2$ et $Y(0) = 1$ donc $K = \mathrm{e}^{-C} = \dfrac{4}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

(b) u et v sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et $\forall t > 0,\ u'(t) = \dfrac{(t-1)\,\mathrm{e}^t}{t^2}, \quad v'(t) = \dfrac{4}{\sqrt{\mathrm{e}}} \times \dfrac{(t-1)^2\,\mathrm{e}^{t-\frac{1}{t}}}{t^4}$

Donc u est décroissante sur $]0,1[$ et croissante sur $]1, +\infty[$ donc admet un minimum en $t = 1$ égal à e ($u(1) = \mathrm{e}$) ; v est strictement croissante.



$t \mapsto u(t)$



$t \mapsto v(t)$

i. Y est positif (admis en début de question) sur $\mathbb{R}$, donc par composition de fonctions, $u \circ Y$ est supérieur à e sur $\mathbb{R}$.
$v(2) = \mathrm{e}$ et v est strictement croissante, et comme $v \circ X \geqslant \mathrm{e}$, on déduit $X \geqslant 2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

ii. Soit $x \geqslant 2$; la restriction de u à $]0, 1[$ réalise une bijection décroissante vers $]2, +\infty[$ donc l'équation $\dfrac{e^y}{y} = \dfrac{4}{\sqrt{e}} \times \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2}$ admet une solution unique $a(x)$ appartenant à $]0, 1[$. Le raisonnement est identique sur $]1, +\infty[$.

iii. Par le même raisonnement, $X = 2 \Rightarrow Y = 1$, et en calculant X' et Y' grâce aux deux équations de $(\mathcal{S})$, on obtient $X'(t) = 0$ et $Y'(t) = -1$.